

Assignatura	Propulsió			
CODI	220052			
Activitat avaluable	%Ponderació nota final	Alumne	Nota	Pàgina
Examen Parcial	25	Enunciat	-	2
		Resolució	-	3
		GLL	4,0	5
		GA	5,6	8
		TC	7,2	14
		JG	10	19
Examen Final	25	Enunciat	-	25
		Resolució	-	26
		JG	6,5	27
		DF	8,0	31
		IG	10	36
Treball 1 (en grup)	25	Enunciat	-	42
		Resolució	-	43
		IS i GLL	6,0	46
		MM, ALL i JC	8,6	57
		SG, IG i FH	10	81
Treball 2 (en grup)	25	Enunciat	-	92
		Resolució	-	94
		GLL	5,0	99
		RA, GM i SP	8,4	112
		GA, JC i ET	10	136

COGNOMS:

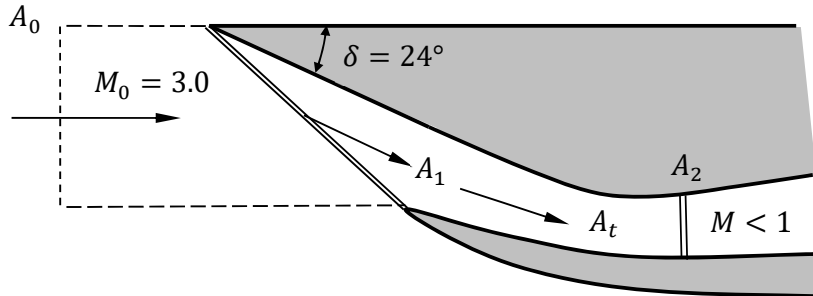
NOM:

DNI:

PUNTUACIÓ: /10

EXERCICI 1 (2.4 P)

Considerar una presa d'aire de compressió interna-externa amb una configuració de dues ones de xoc: una obliqua, i una altra de normal. Per raons d'estabilitat de funcionament, l'ona de xoc normal es troba en el tram divergent del difusor, en una secció on l'àrea transversal A_2 és un 10% superior a l'àrea de la gola A_t .



Sabent a més que $A_t/A_1 = 0.8$, calcular el factor de recuperació global.

EXERCICI 2 (7.6 P)

El disseny preliminar d'un nou motor turboreactor de doble flux (toveres convergents) per propulsar un avió de llarg abast considera la condició operacional de $M_0 = 0.85$ a 11.000 m ISA, amb els paràmetres i eficiències següents:

α	π_f	π_{LPC}	π_{HPC}	T_{t4} (K)
11	1.52	6	9	1450

π_d	η_f	η_{LPC}	η_{HPC}	π_b	η_b	η_{HPT}	η_{LPT}	η_{mH}	η_{mL}	π_{np}	π_{ns}
0.99	0.89	0.88	0.86	0.96	0.99	0.91	0.92	0.993	0.997	0.995	0.995

Prenent $\gamma_c = 1.4$, $\gamma_t = 1.3$, $R_g = 287 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ i $h = 43 \text{ MJkg}^{-1}$, es demana:

- Consum específic del motor. (4 P)
- Pel compressor HPC (d'etapes repetides amb grau de reacció 0.5), calcular el rendiment politròpic, nombre d'etapes mínim i velocitat tangencial de gir U , sabent que $[(\Delta T_t)_s]_{max} = 45 \text{ K}$, $\alpha_1 = 30^\circ$ i $M_1^{(1)} = 0.5$. (1.8 P)
- Per a la primera etapa de la turbina LPT (de quatre etapes repetides i amb flux d'entrada axial a cada etapa), amb $X = 1.25$ i $M_T^{(1)} = 0.6$, calcular, els números de Mach $M_1^{(1)}$ i $M_2^{(1)}$, l'angle $\alpha_2^{(1)}$ i el grau de reacció $R^{(1)}$, suposant que està dissenyada per màxima potència per unitat de flux màssic. (1.8P)

EXERCICI 1

Factor de recuperació

$$\delta = 24^\circ \rightarrow \beta = 42.78^\circ \rightarrow M_{0n} = 2.0374 \rightarrow \frac{P_{t1}}{P_{t0}} = 0.7034 \quad M_1 = 1.7744$$

Tenint en compte les relacions d'àrees

$$\frac{\bar{m}_2}{\bar{m}_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_1 A_t}{A_t A_2} = \frac{1}{0.8} \times \frac{1}{1.1} = \frac{1}{0.88} \rightarrow \bar{m}_2 = 0.5512$$

Per tant, el Mach davant de la segona ona de xoc (normal) i la relació de pressions d'estancament seran

$$M_2 = 1.59 \rightarrow \frac{P_{t2}}{P_{t1}} = 0.8989$$

El factor de recuperació global serà

$$\eta_r = \frac{P_{t2}}{P_{t0}} = \frac{P_{t1} P_{t2}}{P_{t0} P_{t1}} = 0.6323$$

EXERCICI 2

Consum específic

(A 11000 m ISA és $T_0 = 216.65$ K)

$$\theta_0 = 1.1445 \quad \delta_0 = 1.6038 \quad p_{t19} = 2.4014p_0 \quad M_{19} = 1 \quad p_{19} = 1.2686p_0$$

$$\tau_f = 1.1428 \quad T_{t19} = 283.4 \text{ K} \quad T_{19} = 236.1 \text{ K} \quad u_{19} = 308.0 \text{ ms}^{-1}$$

$$\tau_{LPC} = 1.7597 \quad \tau_{HPC} = 2.0156 \quad \tau_c = 3.5469 \quad f = 0.0226$$

$$\tau_{HPT} = 0.7569 \quad \tau_{LPT} = 0.5829 \quad \pi_{HPT} = 0.2601 \quad \pi_{LPT} = 0.0730$$

$$p_{t9} = 1.5549p_0 \quad M_9 = 0.8455 \quad p_9 = p_0 \quad T_{t9} = 639.7 \text{ K} \quad T_9 = 577.8 \text{ K}$$

$$u_9 = 392.6 \text{ ms}^{-1} \quad \frac{F}{\dot{m}} = \frac{F_p}{\dot{m}} + \frac{F_s}{\dot{m}} = 150.6 + 1142.1 = 1292.7 \text{ ms}^{-1}$$

$$c_s = \frac{\dot{m}_f}{F} = \frac{\dot{m}}{F} f = 1.7456 \cdot 10^{-5} \text{ kg s}^{-1} \text{N}^{-1}$$

Rendiment politròpic, nombre mínim d'etapes i velocitat de gir HPC

$$\pi_{HPC} = \tau_{HPC}^{\frac{\gamma}{\gamma-1} \eta_{p,HPC}} \rightarrow \eta_{p,HPC} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\ln \pi_{HPC}}{\ln \tau_{HPC}} = 0.8956$$

$$T_{t3}^{(N)} - T_{t1}^{(1)} = T_{t1}^{(1)} \left(\frac{T_{t3}^{(N)}}{T_{t1}^{(1)}} - 1 \right) = \left\{ T_{t1}^{(1)} = 436.3 \text{ K} \right\} = T_{t1}^{(1)} (\tau_{HPC} - 1) = 443.1 \text{ K}$$

$$N_{etapes} = \frac{T_{t3}^{(N)} - T_{t1}^{(1)}}{(\Delta T_t)_{smax}} = \frac{443.1}{45} = 9.85 \rightarrow N_{etapes} = 10 \rightarrow (\Delta T_t)_s = 44.3 \text{ K}$$

$$v_1 = V_1 \sin \alpha_1 = M_i \sqrt{\gamma R T_i} \sin \alpha_1 = 102.15 \text{ ms}^{-1}$$

$$U^2 - 204.31U - 44513.58 = 0 \rightarrow U = 336.57 \text{ ms}^{-1}$$

Números de Mach $M_1^{(1)}$, $M_2^{(1)}$ de la primera etapa HPT

$$T_{t1}^{(1)} = T_{t45} = 1097.5 \text{ K} \quad (\Delta T_t)_s = \frac{T_{t1}^{(1)}(1 - \tau_{HPT})}{N_{st}} = 114.44 \text{ K}$$

$$\tau_t^{(1)} = 0.8957$$

$$y^{(1)} = \frac{1 - \tau_t^{(1)}}{(\gamma - 1)M_t^{(1)}} = 0.5793 \rightarrow \{\text{taules màx. pot. per } X = 1.25\} \rightarrow$$

$$\rightarrow M_2^{(1)} = 1.1915 \quad \alpha_2^{(1)} = 36.14^\circ \quad M_1^{(1)} = 0.8554$$

$$R^{(1)} = 1 - \frac{M_2^{(1)} \sin \alpha_2^{(1)}}{2M_t^{(1)}} = 0.4144$$

COGNOMS:

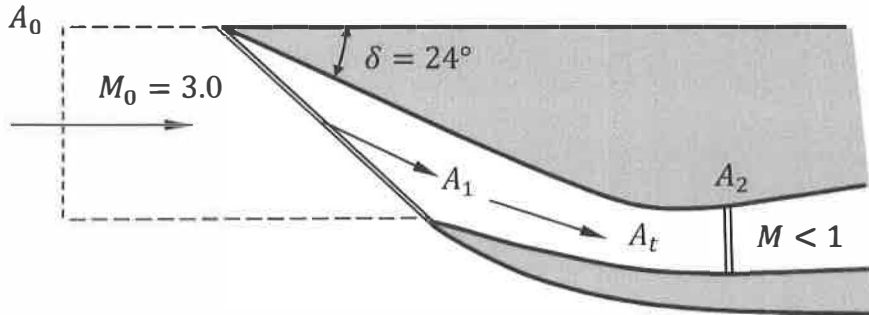
NOM:

DNI:

PUNTUACIÓ: 4 /10

EXERCICI 1 (2.4 P)

Considerar una presa d'aire de compressió interna-externa amb una configuració de dues ones de xoc: una obliqua, i una altra de normal. Per raons d'estabilitat de funcionament, l'ona de xoc normal es troba en el tram divergent del difusor, en una secció on l'àrea transversal A_2 és un 10% superior a l'àrea de la gola A_t .



Sabent a més que $A_t/A_1 = 0.8$, calcular el factor de recuperació global.

EXERCICI 2 (7.6 P)

El disseny preliminar d'un nou motor turboreactor de doble flux (toberes convergents) per propulsar un avió de llarg abast considera la condició operacional de $M_0 = 0.85$ a 11.000 m ISA, amb els paràmetres i eficiències següents:

α	π_f	π_{LPC}	π_{HPC}	T_{t4} (K)
11	1.52	6	9	1450

π_d	η_f	η_{LPC}	η_{HPC}	π_b	η_b	η_{HPT}	η_{LPT}	η_{mH}	η_{mL}	π_{np}	π_{ns}
0.99	0.89	0.88	0.86	0.96	0.99	0.91	0.92	0.993	0.997	0.995	0.995

Prenent $\gamma_c = 1.4$, $\gamma_t = 1.3$, $R_g = 287 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ i $h = 43 \text{ MJkg}^{-1}$, es demana:

- Consum específic del motor. (4 P)
- Pel compressor HPC (d'etapes repetides amb grau de reacció 0.5), calcular el rendiment politròpic, nombre d'etapes mínim i velocitat tangencial de gir U , sabent que $[(\Delta T_t)_s]_{max} = 45 \text{ K}$, $\alpha_1 = 30^\circ$ i $M_1^{(1)} = 0.5$. (1.8 P)
- Per a la primera etapa de la turbina LPT (de quatre etapes repetides i amb flux d'entrada axial a cada etapa), amb $X = 1.25$ i $M_T^{(1)} = 0.6$, calcular, els números de Mach $M_1^{(1)}$ i $M_2^{(1)}$, l'angle $\alpha_2^{(1)}$ i el grau de reacció $R^{(1)}$, suposant que està dissenyada per màxima potència per unitat de flux màssic. (1.8P)

Exercici 2

GLL



$$\theta_0 = 1 + \frac{\gamma_c - 1}{2} M_0^2 = 1,1445$$

$$\delta_0 = \theta_0 \frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1} = 1,6038$$

$$T_0 = 216,65 \text{ K } (= 288,15 - 0,0065 \cdot H)$$

$$p_0 = 101325 \cdot \left(\frac{288,15}{T_0} \right)^{5,256} = 453653,65 \text{ Pa}$$

$$\frac{p_{19}}{p_0} = \delta_0 \pi_d \pi_f \pi_{nc} = 2,4014 \rightarrow p_{19} = 1089385,42 \text{ Pa}$$

$$M_{19} = \sqrt{\frac{2}{\gamma_c - 1} \left[\left(\frac{p_{19}}{p_0} \right)^{\frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c}} - 1 \right]} = 1,1925 \text{ (checked)} \Rightarrow M_{19} = 1$$

$$\frac{T_{19}}{T_0} = \frac{\gamma_c + 1}{2} \rightarrow T_{19} = \frac{2}{\gamma_c + 1} \cdot T_{19} \otimes$$

$$\frac{p_{19}}{p_0} = \frac{p_{19}}{p_0} \left(\frac{2}{\gamma_c + 1} \right)^{\frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1}} = 1,2686 \rightarrow p_{19} = 575502,48 \text{ Pa}$$

$$\eta_f = \frac{\pi_f \frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c} - 1}{\tau_f - 1} \rightarrow \tau_f = 1 + \frac{1}{\eta_f} \left(\pi_f \frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c} - 1 \right) = 1,1428$$

$$\theta_0 = \frac{T_{t0}}{T_0} \rightarrow T_{t0} = 247,96 \text{ K } = T_{t2}$$

$$\tau_f = \frac{T_{t3}}{T_{t2}} = \frac{T_{t19}}{T_{t2}} \rightarrow T_{t19} = 283,36 \text{ K}$$

$$\otimes T_{19} = 236,13 \text{ K}$$

$$u_{19} = M_{19} \sqrt{\gamma_c R T_{19}} = a_{19} = 308,024 \text{ m/s}$$

$$\eta_{LPC} = \frac{\pi_{LPC} \frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c} - 1}{\tau_{LPC} - 1} \rightarrow \tau_{LPC} = 1 + \frac{1}{\eta_{LPC}} \left(\pi_{LPC} \frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c} - 1 \right) = 1,7597$$

$$\tau_{HPC} = 1 + \frac{1}{\eta_{HPC}} \left(\pi_{HPC} \frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c} - 1 \right) = 2,0156$$

$$\tau_c = \tau_{LPC} \cdot \tau_{HPC} = 3,5469$$

$$f = \frac{c_{pt} \cdot T_{t4} - c_{pc} \cdot T_{t3}}{\eta_b \cdot h - c_{pt} \cdot T_{t4}} = 0,02256$$

$$c_{pt} = \frac{\gamma^+}{\gamma^+ - 1} R_g = 1243,67 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$c_{pc} = \frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1} \cdot R_g = 1004,5 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$T_{t3} = \frac{T_{t0}}{\tau_c} = 879,46 \text{ K}$$

$$\dot{W}_{HPC} = \eta_{HPC} \cdot |\dot{W}_{HPT}| \rightarrow \tau_{HPT} = 1 - \frac{1}{\eta_{HPC}} \frac{1}{(1+f)} \frac{c_{pc}}{c_{pt}} \frac{T_{t2}}{T_{t4}} \tau_{LPC} (\tau_{HPC} - 1) = 0,7569$$

$$\dot{W}_{LPC} + \dot{W}_f = \eta_{MLP} \cdot |\dot{W}_{LPT}| \Rightarrow \tau_{LPT} = 1 - \frac{1}{\eta_{MLP}} \frac{1}{(1+f)} \frac{c_{pc}}{c_{pt}} \frac{T_{t2}}{T_{t4}} \frac{1}{\tau_{HPT}} [(\tau_{LPC} - 1) + \alpha(\tau_f - 1)] = 0,5812$$

↓

$$\eta_{HPT} = \frac{1 - \tau_{HPT}}{1 - \pi_{HPT} \frac{\gamma+1}{\gamma}} \rightarrow \pi_{HPT} = \left(1 - \frac{1 - \tau_{HPT}}{\eta_{HPT}}\right) \frac{\gamma}{\gamma+1} = 0,2601$$

$$\tau_t = \tau_{HPT} \cdot \tau_{LPT} = 0,4399$$

$$\pi_{LPT} = \left(1 - \frac{1 - \tau_{LPT}}{\eta_{LPT}}\right) \frac{\gamma}{\gamma+1} = 0,0719$$

$$\frac{p_{t9}}{p_0} = \delta_0 \pi_d \pi_{LPC} \pi_{HPC} \pi_b \pi_{HPT} \pi_{LPT} \pi_{HP} = 1,532 \rightarrow p_{t9} = 694997,56 \text{ Pa}$$

$$M_q = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1} \left[\left(\frac{p_{t9}}{p_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} - 1 \right]} = 0,8305 \rightarrow p_q = p_0 = 453653,65 \text{ Pa}$$

$$T_{t9} = T_{t8} = T_{t4} \cdot \tau_t = 637,87 \text{ K}$$

4

$$T_q = \frac{T_{t9}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_q^2} = 578,07 \text{ K}$$

$$u_q = M_q \cdot a_q = M_q \sqrt{\gamma R_g T_q} = 385,673 \text{ m/s}$$

$$\frac{F_p}{\dot{m}} = (1+f) u_q - M_0 a_0 + \frac{p_q A_{tq}}{\dot{m}} \left(1 - \frac{p_0}{p_q}\right) = (1+f) u_q - M_0 a_0 + (1+f) \frac{R_g T_q}{u_q} \left(1 - \frac{p_0}{p_q}\right) = (1+f) u_q - M_0 a_0$$

$$a_0 = \sqrt{\gamma c R_g T_0} = 295,04 \text{ m/s} \Rightarrow \frac{F_p}{\dot{m}} = 143,5895 \text{ m/s}$$

$$\frac{F_s}{\dot{m}} = \alpha (u_{t9} - M_0 a_0) + \frac{p_{t9} A_{t9}}{\dot{m}} \left(1 - \frac{p_0}{p_{t9}}\right) = \alpha \left[u_{t9} - M_0 a_0 + \frac{R_g T_{t9}}{u_{t9}} \left(1 - \frac{p_0}{p_{t9}}\right) \right] = \left(\frac{1141,9}{1142,034} \right) \text{ m/s}$$

$$F = F_p + F_s \rightarrow \frac{F}{\dot{m}} = \frac{F_p}{\dot{m}} + \frac{F_s}{\dot{m}} = \left(\frac{1141,9}{1142,034} \right) 1285,492 \text{ m/s}$$

$$c_s = \frac{f}{F/\dot{m}} = 1,755 \cdot 10^{-5} \frac{\text{s}}{\text{mm}}$$

COGNOMS:

NOM:

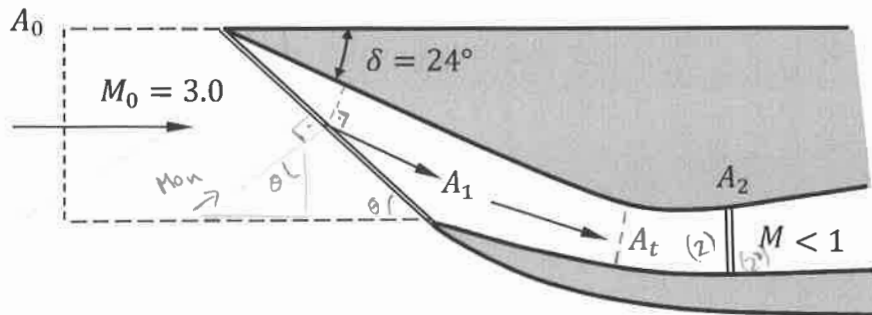
DNI:

GA

PUNTUACIÓ: 5,6/10

EXERCICI 1 (2.4 P)

Considerar una presa d'aire de compressió interna-externa amb una configuració de dues ones de xoc: una obliqua, i una altra de normal. Per raons d'estabilitat de funcionament, l'ona de xoc normal es troba en el tram divergent del difusor, en una secció on l'àrea transversal A_2 és un 10% superior a l'àrea de la gola A_t .



Sabent a més que $A_t/A_1 = 0.8$, calcular el factor de recuperació global.

EXERCICI 2 (7.6 P)

El disseny preliminar d'un nou motor turboreactor de doble flux (toberes convergents) per propulsar un avió de llarg abast considera la condició operacional de $M_0 = 0.85$ a 11.000 m ISA, amb els paràmetres i eficiències següents:

α	π_f	π_{LPC}	π_{HPC}	T_{t4} (K)
11	1.52	6	9	1450

→ indica afecció del FAN

π_d	η_f	η_{LPC}	η_{HPC}	π_b	η_b	η_{HPT}	η_{LPT}	η_{mH}	η_{mL}	π_{np}	π_{ns}
0.99	0.89	0.88	0.86	0.96	0.99	0.91	0.92	0.993	0.997	0.995	0.995

Prenent $\gamma_c = 1.4$, $\gamma_t = 1.3$, $R_g = 287 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ i $h = 43 \text{ MJkg}^{-1}$, es demana:

- Consum específic del motor. (4 P)
- Pel compressor HPC (d'etapes repetides amb grau de reacció 0.5), calcular el rendiment politròpic, nombre d'etapes mínim i velocitat tangencial de gir U , sabent que $[(\Delta T_t)_s]_{max} = 45 \text{ K}$, $\alpha_1 = 30^\circ$ i $M_1^{(1)} = 0.5$. (1.8 P)
- Per a la primera etapa de la turbina LPT (de quatre etapes repetides i amb flux d'entrada axial a cada etapa), amb $X = 1.25$ i $M_T^{(1)} = 0.6$, calcular, els números de Mach $M_1^{(1)}$ i $M_2^{(1)}$, l'angle $\alpha_2^{(1)}$ i el grau de reacció $R^{(1)}$, suposant que està dissenyada per màxima potència per unitat de flux màssic. (1.8P)

PROPULSIÓ

GA

1) Presa d'aire amb 2 ones de xoc (una obliqua i una normal), una normal al tram divergent del difusor en (2), on $A_2 = 1,1 A_1$ (10% superior). Sabem $A_t/A_1 = 0,8 \rightarrow \eta_r$?

$\eta_r = \frac{P_{t2}}{P_{t1}} = \left(\frac{P_{t0}}{P_{t1}} \cdot \frac{P_{t1}}{P_{t2}} \right)^{-1} = \frac{P_{t1}}{P_{t0}} \cdot \frac{P_{t2}}{P_{t1}} \rightarrow$ després una xoc normal

Una de xoc obliqua: $\delta = 24^\circ$
 $M_0 = 3.0 \rightarrow$ Taules:
 $A_0?$
 $\gamma_c = 1.4$



ha de ser supersònic

$M_1 = 1.76490 \approx 1.76$
(per taules MFP)

Angle de taules $\delta \approx 24.16772^\circ$

Per continuïtat (conservació flux massic): Considerem entrada adiabàtica ($T_t = cte$)

$\bar{m}(M_0, \gamma_c) P_{t0} A_0 = \bar{m}(M_1, \gamma_c) P_{t1} A_1$; Taules MFP ($\gamma_c = 1.4$)
 $\frac{P_{t1}}{P_{t0}} = \frac{\bar{m}(M_0, \gamma_c) A_0}{\bar{m}(M_1, \gamma_c) A_1} \rightarrow A_0 = A_1 \rightarrow \frac{P_{t1}}{P_{t0}} = \frac{0.1617}{0.49025} = 0.3298$

Com que dins el conducte, fins arribar a l'ona de xoc normal (2), el flux és supersònic,

$M_t \geq 1$ i $M_t < M_1, M_2$ (és el M supersònic mínim) } Una de xoc normal a taules

Tram convergent: (adiabàtic) $\bar{m}(M_1, \gamma_c) \frac{P_{t1} A_1}{\sqrt{\gamma P_{t1}}} = \bar{m}(M_t, \gamma_c) \frac{P_{tt} A_t}{\sqrt{\gamma P_{tt}}}$; $\frac{P_{t1}}{P_{tt}} = \frac{\bar{m}(M_t, \gamma_c) A_t}{\bar{m}(M_1, \gamma_c) A_1} = 0.8 \frac{\bar{m}(M_t, \gamma_c)}{\bar{m}(M_1, \gamma_c)}$

$\left[\frac{P_{t2}'}{P_{t1}} = \frac{P_{t1}}{P_{tt}} \cdot \frac{P_{tt}}{P_{t2}'} \rightarrow \text{abans una xoc normal} \right]$

1,2

Tram divergent: (adiabàtic) $\bar{m}(M_t, \gamma_c) P_{tt} A_t = \bar{m}(M_2', \gamma_c) P_{t2}' A_2'$; $\frac{P_{tt}}{P_{t2}'} = \frac{\bar{m}(M_2', \gamma_c) A_2'}{\bar{m}(M_t, \gamma_c) A_t} = 1.1 \frac{\bar{m}(M_2', \gamma_c)}{\bar{m}(M_t, \gamma_c)}$

P_{t2}' abans una xoc || $A_2 = A_2'$ (una xoc normal)
 P_{t2} després una xoc

(taules) $M_2' \approx 1.55$

$\eta_r = \frac{P_{t1}}{P_{t0}} \cdot \frac{P_{t2}'}{P_{t1}} \cdot \left(\frac{P_{t2}}{P_{t2}'} \right) = 0.3298 \cdot 0.8 \cdot \frac{\bar{m}(M_t, \gamma_c)}{\bar{m}(M_1, \gamma_c)} \cdot 1.1 \cdot \frac{\bar{m}(M_2', \gamma_c)}{\bar{m}(M_t, \gamma_c)} \cdot \frac{P_{t2}}{P_{t2}'} = 0.3298 \cdot \frac{P_{t2}}{P_{t2}'} = 0.125$

$A_2'/A_1 = 1.1 \cdot 0.8 = \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_2} \rightarrow \bar{m}_1 = 0.49025 \rightarrow \bar{m}_2' = 0.5571 \rightarrow$ Taules $\rightarrow M_2' \approx 1.57$
9
Com que entre 1 i 2' no hi ha ones de xoc, suposem $P_{t2}' \approx P_{t1}$;

② Turboreactor de doble flux (toberes convergents). Condició operacional $M_0 = 0.85$ a $h = 14000$ m ISA
 Taula eficiències a l'annunciat (i paràmetres)

• Consum específic del motor

$$C_s = \frac{\dot{g}}{F/\dot{m}} \quad ; \quad \text{A-Corrent lliure: ISA} \quad \left\{ \begin{array}{l} T_0 = 288.15 - 0.0065 h = 216.65 \text{ K} \\ [h=14000\text{m}] \end{array} \right. \longrightarrow \theta_0 = \frac{T_{t0}}{T_0} = 1 + \frac{\gamma_c - 1}{2} M_0^2 = 1.1445$$

$$P_0 = 101325 \left(\frac{T_0}{288.15} \right)^{5.256} = 22631.26 \text{ Pa}$$

$$\eta = \frac{C_{pt} T_{t4} - C_{pc} T_{t3}}{\dot{m}_b \cdot h - C_{pt} T_{t4}} \quad \longrightarrow \quad \left. \begin{array}{l} C_{pt} = \frac{\gamma_t}{\gamma_t - 1} R_g = 1243.67 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \\ C_{pc} = \frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1} R_g = 1004.5 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \\ h = 43 \text{ MJ/kg} = 43 \cdot 10^6 \text{ J/kg} \\ T_{t4} = 1450 \text{ K} \end{array} \right\} \text{ Amb } T_{t3} = 879.46 \text{ K} \longrightarrow \eta = 0.022565$$

$$S_0 = \frac{P_{t0}}{P_0} = \left(\frac{T_{t0}}{T_0} \right)^{\frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1}} = 1.6038$$

Hem de calcular $T_{t3} = T_{t25} \eta_{LPC} = T_{t2} \eta_{LPC} \eta_{HPC} = T_{t0} \eta_{LPC} \eta_{HPC} = \theta_0 T_0 \eta_{LPC} \eta_{HPC} = 879.46 \text{ K}$

Necessitem η_{LPC} i η_{HPC} \rightarrow Amb els rendiments isentròpics:

$$\eta_{LPC} = 0.88 = \frac{(\eta_{LPC})^{\frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c}} - 1}{\eta_{LPC} - 1} \quad \longrightarrow \quad \eta_{LPC} = 6 \quad \longrightarrow \quad \eta_{LPC} = 1.7597 \quad (\text{indou efecte FAN})$$

$$\eta_{HPC} = 0.86 = \frac{(\eta_{HPC})^{\frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c}} - 1}{\eta_{HPC} - 1} \quad \longrightarrow \quad \eta_{HPC} = 9 \quad \longrightarrow \quad \eta_{HPC} = 2.0456$$

Ara hem de trobar:

$$F/\dot{m} = (1 + \eta) V_9 - M_0 a_0 + \frac{P_{t9} A_{t9}}{\dot{m}} \left(1 - \frac{P_0}{P_{t9}} \right) + \alpha (U_{t9} - M_0 a_0) + \frac{P_{t9} A_{t9}}{\dot{m}} \left(1 - \frac{P_0}{P_{t9}} \right)$$

Flux secundari: $\alpha = 11$; $U_{t9} = M_{t9} \sqrt{\gamma_c R_g T_{t9}}$

$$M_{t9} = \sqrt{\frac{2}{\gamma_c - 1} \left[\left(\frac{P_{t9}}{P_0} \right)^{\frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c}} - 1 \right]} = 1.1925$$

• Com que es tobera convergent,

$M_{t9}/\max = 1$. En aquest cas, com que

$M_{t9} > 1 \rightarrow$ Tobera oberta i $M_{t9} = 1$

$$\frac{T_{t9}}{T_{t9}} = \frac{\gamma_c + 1}{2} = 1.2 \quad \longrightarrow \quad T_{t9} = \frac{T_{t9}}{1.2} \quad \longrightarrow \quad T_{t9} = \theta_0 T_0 \cdot \eta_g = 283.36 \text{ K} \quad \longrightarrow \quad T_{t9} = 236.43 \text{ K}$$

$$U_{t9} = M_{t9} \sqrt{\gamma_c R_g T_{t9}} = \sqrt{\gamma_c R_g T_{t9}} = 308.0212 \text{ m/s} \quad ; \quad \frac{P_{t9} A_{t9}}{\dot{m}} = \alpha R_g \frac{T_{t9}}{U_{t9}} = 2420.1659 \frac{\text{J} \cdot \text{s}}{\text{kg}}$$

$$a_0 = \sqrt{\gamma_c R_g T_0} = 295.0423 \text{ m/s} \quad ; \quad \frac{P_0}{P_{t9}} = \left(\frac{P_{t9}}{P_0} \right)^{-1} = \frac{P_{t9}}{P_0} \left(\frac{2}{\gamma_c + 1} \right)^{\frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1}} = 0.7883$$

$\eta_g \rightarrow$ amb el rendiment del gan: $\eta_g = 0.89 = \frac{(\eta_g)^{\frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c}} - 1}{\eta_g - 1} \quad \longrightarrow \quad \eta_g = 1.52 \quad \longrightarrow \quad \eta_g = 1.1428$

GA

PROPULSIÓ

Flux primari : $\beta = 0.022565$ (calculat abans);

$$U_a = M_a \sqrt{\gamma P_a T_a} \rightarrow M_a = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{P_{t9}}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} = 1.74 \oplus$$

$$\frac{P_{t9}}{P_0} = \delta_0 \eta_{LPC} \eta_{HPC} \eta_{LPT} \eta_{HPT} \eta_{LTP} = 5.1313$$

Hem de trobar η_{LPT} , η_{HPT} :

Amb balanços de potència \rightarrow HPC-HPT : $C_p T_{t2} \tau_{LPC} (\tau_{HPC} - 1) = \dot{m}_{HPT} (1+\beta) C_p T_{t4} (1 - \tau_{HPT})$

Si $T_{t2} = T_0 = T_0 \theta_0 = 313.06 \text{ K} \rightarrow \tau_{HPT} = 0.6931$

$\dot{m}_{HPT} = 0.993$

τ_{LPC} , τ_{HPC} abans calculats

\rightarrow LPC-LPT : $C_p T_{t2} (\tau_{LPC} - 1) = \dot{m}_{LPT} (1+\beta) C_p T_{t4} \tau_{HPT} (1 - \tau_{LPT})$

$(T_{t2}(\tau_{LPC}-1))$

\rightarrow Amb $\dot{m}_{LPT} = 0.997$

τ_{HPT} acabat de calcular

$\rightarrow \tau_{LPT} = 0.8125$

Amb τ_{LPT} i τ_{HPT} calculem η_{LPT} , η_{HPT} amb els rendiments isentròpics:

$\tau_{LPT} = 0.8125 \rightarrow \eta_{LPT} = 0.92 = \frac{1 - \tau_{LPT}}{1 - (\eta_{LPT})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \rightarrow \eta_{LPT} = 0.3725$

$\tau_{HPT} = 0.6931 \rightarrow \eta_{HPT} = 0.91 = \frac{1 - \tau_{HPT}}{1 - (\eta_{HPT})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \rightarrow \eta_{HPT} = 0.1682$

2,8

\oplus Com en el cas anterior, tenim ofegada i $M_a = 1$

$T_{t9} = \tau_{LPT} \cdot \tau_{HPT} \cdot T_{t4} = 816.56 \text{ K} \rightarrow T_a = \frac{T_{t9}}{1 + \frac{\gamma-1}{2}} = 710.05 \text{ K} \rightarrow U_a = \sqrt{\gamma P_a T_a} = 514.7035 \text{ m/s}$

$a_0 = 295.0423 \text{ m/s} \rightarrow$ calculat abans

$\frac{P_a A_a}{\dot{m}} = \frac{(1+\beta) P_a T_a}{U_a} = 404.8598 \frac{\text{J}}{\text{kg m}}$

$\frac{P_0}{P_a} = \left[\frac{P_{t9}}{P_a} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right]^{-1} = 0.3571$

Així doncs:

$F/\dot{m} = (1+\beta) U_a - M_0 a_0 + \frac{P_a A_a}{\dot{m}} \left(1 - \frac{P_0}{P_a} \right) + \alpha (U_{1a} - M_0 a_0) + \frac{P_{t9} A_{t9}}{\dot{m}} \left(1 - \frac{P_0}{P_{t9}} \right) = 1677.75 \frac{\text{N}}{\text{kg/s}}$

Clavours, $C_s = \frac{\beta}{F/\dot{m}} = \frac{0.022565}{1677.75 \text{ N/kg/s}} = 1.3450 \frac{\text{N}}{\text{kg/s}}$

- Compressor HPC (etapes repetides) amb $R = 0.5$, calcular el rendiment politròpic, nombre d'etapes mínim i velocitat tangencial de gir U sabent $[(\Delta T_e)_s]_{\max} = 45 \text{ K}$, $\alpha_1 = 30^\circ$ i $M_1^{(1)} = 0.5$

$$\eta_{\text{P.C.}} = \frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c} \frac{\ln \eta_c}{\ln \tau_c} \quad \text{on } \eta_c \text{ i } \tau_c \text{ corresponen a } \eta_{\text{HPC}} \text{ i } \tau_{\text{HPC}} \text{ de l'apartat anterior.}$$

$$= \frac{1.4 - 1}{1.4} \frac{\ln 9}{\ln 2.0456} = \boxed{0.8957 \approx 0.9}$$

Per calcular el nombre d'etapes mínim: $N = \frac{T_{t3}^{(N)} - T_{t1}^{(1)}}{[(\Delta T_e)_s]_{\max}}$

$$\text{on } T_{t3}^{(N)} - T_{t1}^{(1)} = T_{t1}^{(1)} \left[\frac{T_{t3}^{(N)}}{T_{t1}^{(1)}} - 1 \right] = T_{t1}^{(1)} \left[\tau_c - 1 \right]$$

" τ_{HPC}

i $T_{t1}^{(1)}$ és la temperatura d'entrada al HPC \rightarrow Apartat anterior: $T_{t1}^{(1)} = T_0 \tau_{\text{LPC}} =$

$$N = \frac{T_{t3}^{(N)} - T_{t1}^{(1)}}{[(\Delta T_e)_s]_{\max}} = \frac{T_{t1}^{(1)} (\tau_{\text{HPC}} - 1)}{[(\Delta T_e)_s]_{\max}} = \frac{436.33 (2.0456 - 1)}{45} = 9.85$$

$= 246.65 \cdot 1.1445 \cdot 1.7597 = 436.33 \text{ K}$

\rightarrow Per tant $N_{\min} = 10$ 1.2

Per calcular la velocitat tangencial de gir U :

\rightarrow Etapes i files repetides; $U = v_1 + v_2 = V_1 \sin \alpha_1 + V_2 \sin \alpha_2$
(perquè $R = 0.5$)

$$u_1 = u_2; \quad V_1 \cos \alpha_1 = V_2 \cos \alpha_2$$

$$U = V_1 (\sin \alpha_1 + \cos \alpha_1 \tan \alpha_2) \quad \oplus$$

$$V_1^{(1)} = M_1^{(1)} a_1 = M_1^{(1)} \sqrt{\gamma_c R T_1^{(1)}} \quad \text{on } T_1^{(1)} = \frac{T_{t1}^{(1)}}{1 + \frac{\gamma_c - 1}{2} M_1^{(1)2}} = 445.55 \text{ K}$$

$$= 204.3086 \text{ m/s}$$

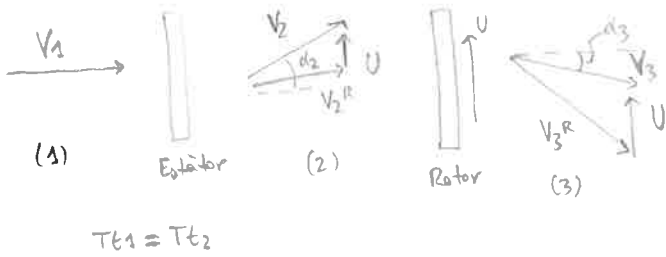
$\oplus U = V_1 (\sin \alpha_1 + \cos \alpha_1 \tan \alpha_2)$ \rightarrow em falta una dada, o α_2 o $M_2^{(1)}$.

GA

Primera etapa turbina LPT (4 etapes repetides amb flux d'entrada axial a cada etapa).

$X = 1.25$; $M_T^{(1)} = 0.6$. Calcular $M_1^{(1)}$, $M_2^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$ i $R^{(1)}$ suposant dissenyada per màxima potència per unitat de in $v_1^{(i)} = 0$

1 etapa



$X = 1.25$; $\dot{W}/\dot{m}|_{max}$; $M_T^{(1)} = 0.6$

$$M_T = \frac{U}{\sqrt{\gamma c_p T_2}}$$

T_{t1} (entrada turbina) = T_{t4} \uparrow \uparrow $T_{HPT} = 1005$ K
 LPT \uparrow \uparrow 1150 K 0.6934
 (apartat turbofan)

Per a turbina, $R = \frac{h_2 - h_3}{h_1 - h_3} = \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_3} =$

$$= 1 - \frac{V_2^2 - V_3^2}{2(h_1 - h_3)}$$

$V_1 = V_2$
 etapes repetides

$$T_1 = \frac{T_{t1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}$$

Amb l'equació de Euler: $\frac{1}{(\gamma - 1) M_T^2} = \frac{M_2 \sin \alpha_2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}$

0.4

velocitat axial =cte $\rightarrow V_1 = V_2 \sin \alpha_2 = V_3 \sin \alpha_3$ (perquè etapes repetides) ; $V_1 = V_3 = V_2 \sin \alpha_2$

$$(\Delta T_t)_s = \frac{-T_{t4} \tau_{HPT} + T_{t4} \tau_{HPT} \tau_{LPT}}{4} = \frac{T_{t4} \tau_{HPT} (\tau_{LPT} - 1)}{4} = -47.11$$
 K

$$R = 1 - \frac{(V_2^2 + U^2) - V_1^2}{2(h_1 - h_3)} = 1 - \frac{V_2^2}{2(h_1 - h_3)} = 1 - \frac{V_2^2}{2WR \gamma c_p T_1} = 1 - \frac{V_2}{2U} = \frac{1}{2}$$

$V_1^2 = U^2$; $(h_1 - h_3 = WR (V_2 - V_1^2))$
 Euler

Si trobem $M_1^{(1)}$ \rightarrow amb les taules de $\dot{W}/\dot{m}|_{max}$ trobem $M_2^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$;

COGNOMS:

NOM:

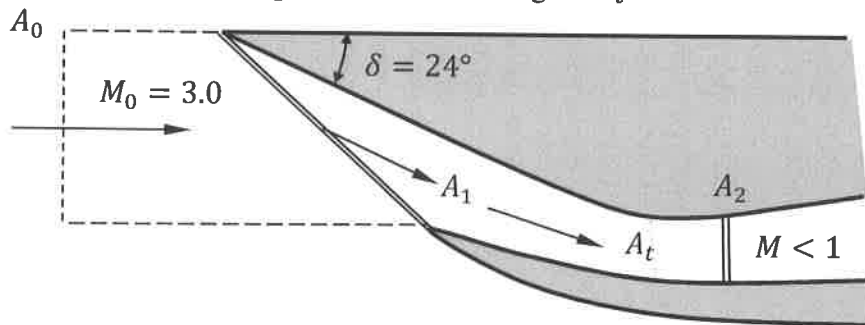
DNI:

TC

PUNTUACIÓ: 7.2/10

EXERCICI 1 (2.4 P)

Considerar una presa d'aire de compressió interna-externa amb una configuració de dues ones de xoc: una obliqua, i una altra de normal. Per raons d'estabilitat de funcionament, l'ona de xoc normal es troba en el tram divergent del difusor, en una secció on l'àrea transversal A_2 és un 10% superior a l'àrea de la gola A_t .



Sabent a més que $A_t/A_1 = 0.8$, calcular el factor de recuperació global.

EXERCICI 2 (7.6 P)

El disseny preliminar d'un nou motor turboreactor de doble flux (toberes convergents) per propulsar un avió de llarg abast considera la condició operacional de $M_0 = 0.85$ a 11.000 m ISA, amb els paràmetres i eficiències següents:

α	π_f	π_{LPC}	π_{HPC}	T_{t4} (K)
11	1.52	6	9	1450

π_d	η_f	η_{LPC}	η_{HPC}	π_b	η_b	η_{HPT}	η_{LPT}	η_{mH}	η_{mL}	π_{np}	π_{ns}
0.99	0.89	0.88	0.86	0.96	0.99	0.91	0.92	0.993	0.997	0.995	0.995

Prenent $\gamma_c = 1.4$, $\gamma_t = 1.3$, $R_g = 287 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ i $h = 43 \text{ MJkg}^{-1}$, es demana:

- Consum específic del motor. (4 P)
- Pel compressor HPC (d'etapes repetides amb grau de reacció 0.5), calcular el rendiment politròpic, nombre d'etapes mínim i velocitat tangencial de gir U , sabent que $[(\Delta T_t)_s]_{max} = 45 \text{ K}$, $\alpha_1 = 30^\circ$ i $M_1^{(1)} = 0.5$. (1.8 P)
- Per a la primera etapa de la turbina LPT (de quatre etapes repetides i amb flux d'entrada axial a cada etapa), amb $X = 1.25$ i $M_T^{(1)} = 0.6$, calcular, els números de Mach $M_1^{(1)}$ i $M_2^{(1)}$, l'angle $\alpha_2^{(1)}$ i el grau de reacció $R^{(1)}$, suposant que està dissenyada per màxima potència per unitat de flux màssic. (1.8P)

EXERCICI 1

$$A_2 = 1.1 A_t \rightarrow \frac{A_2}{A_t} = 1.1 \quad \frac{A_2}{A_t} \cdot \frac{A_t}{A_1} = \frac{A_2}{A_1} = 1.1 \cdot 0.8 = 0.88$$

Entrant a taules amb $M_0 = 3.0$ i $\delta = 24^\circ$ obtenim aproximadament (sense interpolar) $M_{1n} = 2.046$ i $M_2 = 1.7649$, components a $\theta = 45^\circ$ en la nomenclatura de l'enunciat:
 $M_{0n} = 2.046$, $M_2 = 1.7649$

$$\eta_r = \frac{P_{t2}}{P_{t1}} \frac{P_{t3}}{P_{t2}} \frac{P_{t4}}{P_{t3}}$$

1.2

$$\frac{A_t}{A_1} = \frac{\bar{m}(M_1, \gamma)}{\bar{m}(M_t, \gamma)} = 0.8 \Rightarrow \bar{m}(M_1, \gamma) = 0.8 \bar{m}(M_t=1, \gamma=14) = 0.547785$$

$$M_1 = 0.555$$

$$\frac{A_2}{A_t} = \frac{\bar{m}(M_t, \gamma)}{\bar{m}(M_2, \gamma)} \cdot 1.1 \Rightarrow \bar{m}(M_2, \gamma) = 1.1 \bar{m}(M_t=1, \gamma=14) =$$

- Primera ona de xoc: $M_0 = 3.0$, $\delta = 24^\circ$. Entrant a taules,

$$M_{0n} = 2.046; M_1 = 1.7649; P_{t2}/P_{t1} \approx 0.83457; P_1/P_2 = 0.29558$$

$$\frac{A_t}{A_1} = \frac{\bar{m}(M_1, \gamma)}{\bar{m}(M_t, \gamma)} = 0.8 \rightarrow \bar{m}(M_t, \gamma) = 0.609375$$

$$M_t = 0.425$$

Segona ona de xoc, ara normal: $M_{2n} \approx 0.72$, $P_{t2}/P_{t1} = 0.95$
 ↳ interpolant aproximadament

$$\eta_r = \frac{P_{t2}}{P_{t1}} \frac{P_{t3}}{P_{t2}} \frac{P_{t4}}{P_{t3}}$$

↳ Caldria trobar-ho per continuïtat, coneguda la relació $A_2 = 1.1 A_t$ (può no tenir temps)

$$A = \frac{\sqrt{R T_e}}{\bar{m}(M, \gamma) P_e} \Rightarrow \sqrt{T_e} \text{ igual, caldria per s'ocient i queda simplificat}$$

EXERCICI 2. TURBOFAN

Cal arribar fins $C_c = \frac{f}{F/\dot{m}}$, així que cal calcular fins l'empenta.

$$\Theta_0 = 1.1445 = 1 + \frac{\gamma_c - 1}{2} M_0^2; \quad \delta_0 = \left(\Theta_0\right)^{\frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1}} = 1.6038; \quad T_0 = 216.65K$$

$$\eta_f = \frac{(\pi_f)^{\frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c}}}{Z_f - 1} \Rightarrow \pi_f Z_f = 1.1428; \quad T_{19} = 247.96K$$

$$M_{19} = \sqrt{\frac{2}{\gamma_c - 1} \left[\left(\frac{P_{19}}{P_0} \right)^{\frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c}} - 1 \right]} = 0.912;$$

$$\frac{P_{19}}{P_0} = \delta_0 \pi_d \pi_f \pi_{ns} = 1.7136;$$

Havia calculat malament T_{19} , els valors nous són en color negre.

$$T_{19} = \frac{T_{10} Z_f}{1 + \frac{\gamma_c - 1}{2} M_{19}^2} = 212.23K$$

$$M_{19} = M_{10} \sqrt{\gamma_c R_g T_{10}} = 266.32 \text{ m/s}$$

Entrem ara al flux primari

$$T_{12} = T_{10}$$

$$\gamma_c = 1.3 \quad C_{p1} = 1243.67 \text{ [J/K]}$$

$$Z_{LPC} = 1 + \frac{(\pi_{LPC})^{\frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c}}}{\eta_{LPC}} = 1.7597;$$

$$\gamma_c = 1.4 \quad C_{p2} = 1004.5 \text{ [J/K]}$$

$$Z_{HPC} = 2.0156;$$

$$f = \frac{C_{p2} T_{14} - C_{p1} T_{10} \Theta_0 Z_{LPC} Z_{HPC}}{\eta_b h - C_{p1} T_{14}} = 0.0226$$

Seguim ara amb les turbines

$$Z_{HPT} = 1 - \frac{1}{\eta_{HPT}} \frac{1}{1+f} \frac{C_{p2}}{C_{p1}} \frac{T_{12}}{T_{14}} Z_{LPC} (Z_{HPC} - 1) = 0.7569$$

$$Z_{LPT} = 1 - \frac{1}{\eta_{LPT} Z_{HPT}} \frac{C_{p2}}{C_{p1}} \frac{T_{10}}{T_{14}} \frac{1}{1+f} \left[(Z_{LPC} - 1) + \alpha (Z_f - 1) \right] = 0.5829$$

$$\eta_{HPT} = \frac{1 - Z_{HPT}}{1 - (\pi_{HPT})^{\frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c}}} \Rightarrow \pi_{HPT} = 0.26, \quad \pi_{LPT} = 0.073$$

valors força baixos... correcte!

$$\frac{P_{19}}{P_0} = \delta_0 \pi_d \pi_{LPC} \pi_{HPC} \pi_b \pi_{HPT} \pi_{LPT} \pi_n = 1.5544 \quad P_a = P_0 \rightarrow M_a = 0.8452$$

$$T_a = \frac{T_{14} Z_{HPT} Z_{LPT}}{1 + \frac{\gamma_c - 1}{2} M_a^2} = 577.82K$$

$$M_a = M_0 \sqrt{\gamma_c R_g T_0} = 392.44 \text{ m/s}$$

EXERCICI 2 Continuuació

$$a_0 = \sqrt{\gamma_c R_g T_0} = 295,04 \text{ m/s}$$

$$\frac{F}{\dot{m}} = \underbrace{(1+f) a_0}_{624,745} + (1+f) \frac{RT_0}{a_0} \left(1 - \frac{1}{P_0/P_0} \right) + \alpha \dot{m}_{1q} + \alpha \frac{RT_0}{a_0} \left(1 - \frac{1}{P_0/P_0} \right) - (1+d) M_0 a_0$$

$\downarrow 1-1=0$ $\downarrow 2929,52$ $\downarrow 0$ $\downarrow 3009,41$

$$\frac{F}{\dot{m}} = 614,91 \text{ [SI]} \rightarrow c_s = \frac{f}{F/\dot{m}} = 36,75 \times 10^{-6} \text{ [SI]}$$

3.6

Apartat 2: compressor. Rendiment politròpic, nombre d'etapes i U

HPC

$$[(\Delta T_e)_s]_{\max} = 45 \text{ K} \quad \alpha_1 = 30^\circ \quad M_1^{(1)} = 0.5 \quad (\pi_c = 9; \zeta_{HPC} = 2.0156)$$

$$\Rightarrow \pi_c = \zeta_c \frac{\gamma}{\gamma-1} \eta_p \rightarrow \eta_p = 0.7234$$

1.8

$$\Rightarrow \text{Nº etapes} = \frac{T_{e3} - T_{e25}}{(\Delta T_e)_{s\max}} = \frac{T_{e0} \zeta_{LPC} \zeta_{HPC} - T_{e0} \zeta_{LPC}}{(\Delta T_e)_{s\max}} = 9.85 \rightarrow \text{Calen 10 etapes com a mínim}$$

Valor real $\rightarrow (\Delta T_e)_s = \frac{T_{e3} - T_{e25}}{10} = 44,31 \text{ K}$

$$\theta_0 = \frac{T_{e_0}}{T_0} \Rightarrow T_i = \frac{T_{e_i}}{\theta_0}$$

$$\Rightarrow \varphi (\Delta T_e)_s = U (U - 2 \cdot v_1) \quad \text{on} \quad v_1 = M_1 \sqrt{\gamma R T_1} \sin \alpha_1$$

$\downarrow 0.5 \quad \downarrow 1.4 \quad \downarrow 287 \quad \downarrow 415,56 \quad \downarrow 30^\circ$

$$v_1 = 102,156 \text{ m/s}$$

U² - 204.312 U - 44509.395 = 0

$$U = 336,56 \text{ m/s} \quad U = -132,248 \text{ m/s (No)}$$

Apartat 3: $\chi = 1.25 \quad M_T^{(1)} = 0.6 \quad M_1, M_2, \alpha_2, R?$

» En estar dissenyat per mínima potència per unitat de flux massís,

$$\frac{2}{3-\gamma} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} M_{2opt}^2 \right) = M_{2opt}^2 - (M_2 \sin \alpha_2)^2 = M_{2opt}^2 - 0.36 \rightarrow M_{2opt} = 1.1428$$

altres valors

$$R = 1 - \frac{M_2 \sin \alpha_2}{2 M_T} \xrightarrow{R=0.5} M_2 \sin \alpha_2 = 0.6$$

$$\alpha_2 = \arcsin \left(\frac{0.6}{M_2} \right) = 31.67^\circ$$

$$\bar{m}(M_1, \gamma) = \chi \cos \alpha_2 \bar{m}_2(M_2, \gamma) = 0.69868 \rightarrow M_1 = 0.656724$$

17

» via equils MFP.

opcio 1 ma fórmula

caldrà seguir de primer pas per trobar $v_2^{(1)}$!!!

Apartat 3

$$(\Delta T_e)_s = \frac{T_{e4} Z_{HOT} - T_{e4} Z_{HOT} Z_{LPT}}{N_{St}} = 114,44 \text{ K}$$

$$U = \sqrt{c_p (\Delta T_e)_s} = 377,26 \text{ m/s} = v_2$$

0.6

$$\frac{W_e / \dot{m}}{\gamma R T_{e1} M_1} = y \rightarrow \frac{W_e}{\dot{m}} = y \cdot \gamma R T_{e1} M_1$$

$$\left(\frac{W_e}{\dot{m}} \right)_{\max} = (y \cdot \gamma R T_{e1} M_1)_{\max}$$

$$w = y \cdot \bar{m}(M_1, \gamma) \Rightarrow y_{\max} = \frac{w_{\max}}{\bar{m}(M_1, \gamma)}$$

$$\hookrightarrow M_1 = 0,57828$$

$$\bar{m} = \dots \hookrightarrow \text{v.a. (amb)} \dots$$

↳ A partir d'aquí trobaria la resta de dades com a l'altra cara del full.

COGNOMS:

NOM:

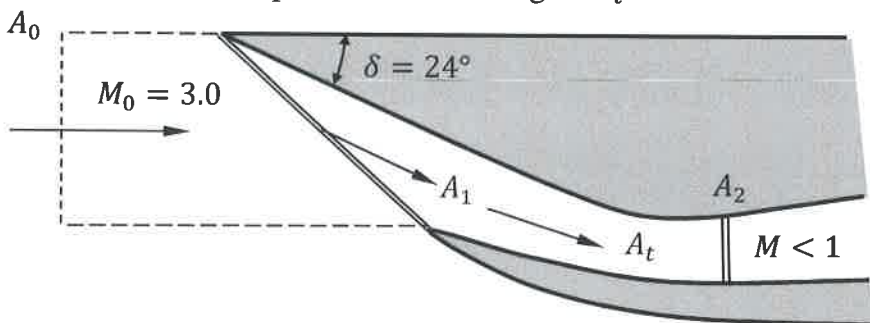
DNI:

JG

PUNTUACIÓ: 10 /10

EXERCICI 1 (2.4 P)

Considerar una presa d'aire de compressió interna-externa amb una configuració de dues ones de xoc: una obliqua, i una altra de normal. Per raons d'estabilitat de funcionament, l'ona de xoc normal es troba en el tram divergent del difusor, en una secció on l'àrea transversal A_2 és un 10% superior a l'àrea de la gola A_t .



Sabent a més que $A_t/A_1 = 0.8$, calcular el factor de recuperació global.

EXERCICI 2 (7.6 P)

El disseny preliminar d'un nou motor turboreactor de doble flux (toveres convergents) per propulsar un avió de llarg abast considera la condició operacional de $M_0 = 0.85$ a 11.000 m ISA, amb els paràmetres i eficiències següents:

(216,65 K)

α	π_f	π_{LPC}	π_{HPC}	T_{t4} (K)
11	1.52	6	9	1450

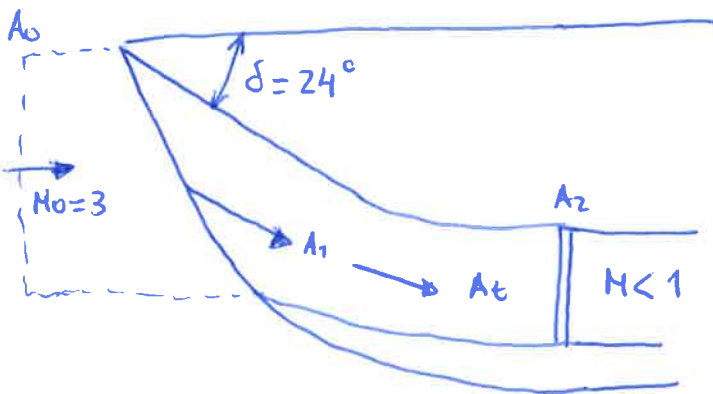
π_d	η_f	η_{LPC}	η_{HPC}	π_b	η_b	η_{HPT}	η_{LPT}	η_{mH}	η_{mL}	π_{np}	π_{ns}
0.99	0.89	0.88	0.86	0.96	0.99	0.91	0.92	0.993	0.997	0.995	0.995

Prenent $\gamma_c = 1.4$, $\gamma_t = 1.3$, $R_g = 287 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ i $h = 43 \text{ MJkg}^{-1}$, es demana:

- Consum específic del motor. (4 P)
- Pel compressor HPC (d'etapes repetides amb grau de reacció 0.5), calcular el rendiment politròpic, nombre d'etapes mínim i velocitat tangencial de gir U , sabent que $[(\Delta T_t)_s]_{max} = 45 \text{ K}$, $\alpha_1 = 30^\circ$ i $M_1^{(1)} = 0.5$. (1.8 P)
- Per a la primera etapa de la turbina LPT (de quatre etapes repetides i amb flux d'entrada axial a cada etapa), amb $X = 1.25$ i $M_T^{(1)} = 0.6$, calcular, els números de Mach $M_1^{(1)}$ i $M_2^{(1)}$, l'angle $\alpha_2^{(1)}$ i el grau de reacció $R^{(1)}$, suposant que està dissenyada per màxima potència per unitat de flux màssic. (1.8P)

JG

Exercici 1



$$A_2 = 1.1 \cdot A_t$$

$$\frac{A_t}{A_1} = 0.8 \quad \eta_{\text{global}} = ?$$

$$\gamma = 1.4$$

- Utilitzant les taules (ones de xoc obliques):

* Per a un Mach incident $M_0 = 3$ i un angle de deflexió $\delta = 24^\circ$, es pren el valor més proper corresponent a $\delta = 24.168^\circ$. S'obté, doncs, un angle $\theta = 43^\circ$,

el M_{0n} equival a 2,046 i el Mach després de la ona de xoc val: $M_1 = 1,7649$.

* Utilitzant taules d'ones de xoc normal, la relació $\frac{P_{t1}}{P_{t0}}$ per a un Mach $M_0 = 2,046$ (es pren el valor de $M_0 = 2,05$) equival a:

$$\frac{P_{t1}}{P_{t0}} = \underline{\underline{0,69751}}$$

* Sabent que: $\frac{A_t}{A_1} = \frac{\bar{m}(M_1, \gamma)}{\bar{m}(M_t, \gamma)} = 0,8$, es pot calcular el Mach a la gola, M_t :

$$\bar{m}(M_1 = 1,7649) = \frac{\bar{m}(M_1 = 1,76) + \bar{m}(M_1 = 1,77)}{2} = \frac{0,49025 + 0,48664}{2} = 0,488445$$

$$\bar{m}(M_t) = \frac{A_1}{A_t} \cdot \bar{m}(M_1) = \frac{0,488445}{0,8} = 0,61056 \approx 0,611$$

* El Mach corresponent a un $\bar{m}(M_t) = 0,611$ és igual a: $M_t = 1,41$

* El Mach a l'Àrea 2 es calcula de la següent manera:

$$\frac{A_2}{A_t} = \frac{1,1 A_t}{A_t} = 1,1 = \frac{\bar{m}(M_t)}{\bar{m}(M_2)} \rightarrow \bar{m}(M_2) = \frac{\bar{m}(M_t)}{1,1} = \frac{0,61056}{1,1} = 0,555$$

* El Mach corresponent a un $\bar{m}(M_2) = 0,555$ és igual a: $M_2 = 1,58$

* Utilitzant taules d'ones de xoc normal, la relació $\frac{P_{t2}}{P_{t1}}$ per a un Mach $M_2 = 1,58$ (es pren el valor de $M_2 = 1,60$) equival a:

$$\frac{P_{t2}}{P_{t1}} = \underline{\underline{0,89520}}$$

El factor de recuperació global valdrà:

$$\eta_{r, \text{global}} = \frac{P_{t2}}{P_{t0}} = \frac{P_{t1}}{P_{t0}} \cdot \frac{P_{t2}}{P_{t1}} = 0,69751 \cdot 0,89520 = 0,6244$$

El factor de recuperació global equival a: $\eta_{r, \text{global}} = 0,6244$

2.4

Exercici 2

$$M_0 = 0,85; \quad T_0 = 288,15 - 0,0065 \cdot 11000 = 216,65 \text{ K}; \quad p_0 = 101325 \left(\frac{216,65}{288,15} \right)^{5,256} = 22631,26 \text{ Pa}$$

$$\alpha = 11; \quad \pi_f = 1,52; \quad \pi_{LPC} = 6; \quad \pi_{HPC} = 9; \quad T_{t4} = 1450 \text{ K}; \quad \pi_d = 0,99; \quad \eta_f = 0,89; \quad \eta_{LPC} = 0,88;$$

$$\eta_{HPC} = 0,86; \quad \pi_b = 0,96; \quad \eta_b = 0,94; \quad \eta_{HPT} = 0,91; \quad \eta_{LPT} = 0,92; \quad \eta_{MH} = 0,993; \quad \eta_{mL} = 0,997;$$

$$\pi_{HP} = 0,995; \quad \pi_{ns} = 0,995; \quad \gamma_c = 1,4; \quad \gamma_t = 1,3; \quad R_g = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}; \quad h = 43 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

a) $C_s = ?$ Es comença pel flux secundari:

- Paràmetre δ_0 : $\delta_0 = \left(1 + \frac{\gamma_c - 1}{2} M_0^2 \right)^{\gamma_c / (\gamma_c - 1)} = 1,60382$

- Càlcul de Z_f : $\eta_f = \frac{(\pi_f)^{\gamma_c - 1 / \gamma_c} - 1}{Z_f - 1} \rightarrow Z_f = 1,14279$

- Càlcul de $\frac{P_{t19}}{P_0}$: $\frac{P_{t19}}{P_0} = \delta_0 \cdot \pi_d \cdot \pi_f \cdot \pi_{ns} = 2,40136$

- Càlcul de M_{19} : $M_{19} = \sqrt{\frac{2}{\gamma_c - 1} \left[\left(\frac{P_{t19}}{P_0} \right)^{\gamma_c - 1 / \gamma_c} - 1 \right]} = 1,1925 > 1$

Com que $M_{19} > 1$, aleshores $M_{19} = 1$; la pressió P_{19} equival a:

$$P_{19} = P_0 \cdot \frac{P_{t19}}{P_0} \cdot \left(\frac{2}{\gamma_c + 1} \right)^{\gamma_c / (\gamma_c - 1)} = 28709,898 \text{ Pa}$$

- Temperatura T_{19} : $T_{19} = \frac{T_{t0} \cdot Z_f}{1 + \frac{\gamma_c - 1}{2} M_{19}^2} = \frac{T_0 \left(1 + \frac{\gamma_c - 1}{2} M_0^2 \right) \cdot Z_f}{1 + \frac{\gamma_c - 1}{2} M_{19}^2} = 236,1346 \text{ K}$

- Velocitat u_{19} :

$$u_{19} = M_{19} \sqrt{\gamma_c R_g T_{19}} = 308,024 \text{ m/s}$$

Per al flux primari es té:

- Càlcul de Z_{LPC} : $\eta_{LPC} = \frac{(\pi_{LPC})^{\gamma_c - 1 / \gamma_c} - 1}{Z_{LPC} - 1} \rightarrow Z_{LPC} = 1,75967$

- Càlcul de Z_{HPC} : $\eta_{HPC} = \frac{(\pi_{HPC})^{\gamma_c - 1 / \gamma_c} - 1}{Z_{HPC} - 1} \rightarrow Z_{HPC} = 2,0156$

- Càlcul de T_{t3} : $T_{t3} = T_{t0} \cdot Z_{LPC} \cdot Z_{HPC} = T_0 \left(1 + \frac{\gamma_c - 1}{2} M_0^2\right) \cdot Z_{LPC} \cdot Z_{HPC} = 879,4478 \text{ K}$

- Càlcul de c_{pt} i c_{pc} : $c_{pc} = \frac{\delta_c R_g}{\delta_c - 1} = 1004,5 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$; $c_{pt} = \frac{\delta_t R_g}{\delta_t - 1} = 1243,67 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$

- Càlcul de la fracció de combustible f : $f = \frac{c_{pt} T_{t4} - c_{pc} T_{t3}}{Q_b \cdot h - c_{pt} T_{t4}} = 0,022565$

- Càlcul de Z_{HPT} : $Z_{HPT} = 1 - \frac{c_{pc}}{\eta_{mh} c_{pt}} \frac{T_{t0}}{T_{t4}} \frac{1}{1+f} Z_{LPC} (Z_{HPC} - 1) = 0,75691$

- Càlcul de Z_{LPT} : $Z_{LPT} = 1 - \frac{1}{\eta_{mL} Z_{HPT}} \frac{c_{pc}}{c_{pt}} \frac{T_{t0}}{T_{t4}} \frac{1}{1+f} [(Z_{LPC} - 1) + \alpha (Z_t - 1)] = 0,58293$

- Càlcul de π_{HPT} : $\pi_{HPT} = \frac{1 - Z_{HPT}}{1 - (\pi_{HPT})^{\delta_t - 1/\delta_t}} \rightarrow \pi_{HPT} = 0,26008$

- Càlcul de π_{LPT} : $\pi_{LPT} = \frac{1 - Z_{LPT}}{1 - (\pi_{LPT})^{\delta_t - 1/\delta_t}} \rightarrow \pi_{LPT} = 0,07302$

4

- Càlcul de $\frac{P_{t9}}{P_0}$: $\frac{P_{t9}}{P_0} = \delta_0 \cdot \pi_d \cdot \pi_{LPC} \cdot \pi_{HPC} \cdot \pi_b \cdot \pi_{HPT} \cdot \pi_{LPT} \cdot \pi_{np} = 1,55535$

- Càlcul de M_q : $M_q = \sqrt{\frac{2}{\delta_t - 1} \left[\left(\frac{P_{t9}}{P_0} \right)^{\delta_t - 1/\delta_t} - 1 \right]} = 0,8458 \rightarrow P_q = P_0 = 22631,26 \text{ Pa}$

- Temperatura T_q : $T_q = \frac{T_{t4} \cdot Z_{LPT} \cdot Z_{HPT}}{1 + \frac{\delta_t - 1}{2} M_q^2} = 577,778 \text{ K}$

- Velocitat u_q : $u_q = M_q \sqrt{\delta_t R_g T_q} = 392,70 \text{ m/s}$

- Càlcul de F/m :

$$F/m = (1+f) u_q - M_0 \sqrt{\gamma_c R T_0} + \frac{(1+f) \cdot R_g \cdot T_q}{u_q} \left(1 - \frac{P_0}{P_q}\right) + \alpha \left(u_{t9} - M_0 \sqrt{\gamma_c R_g T_0}\right) + \frac{\alpha R_g T_{t9}}{u_{t9}} \left(1 - \frac{P_0}{P_{t9}}\right)$$

$$= (1+0,022565) \cdot 392,70 - 0,85 \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 216,65} + 11 \cdot \left(308,024 - 0,85 \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 216,65}\right) + \frac{11 \cdot 287 \cdot 236,1346}{308,024} \cdot \left(1 - \frac{22631,26}{28709,898}\right) = 1292,8115 \text{ m/s}$$

- El consum específic serà:

$$\left[C_s = \frac{m_f}{F} = \frac{m_f/m}{F/m} = \frac{f}{F/m} = \frac{0,022565}{1292,8115} = 1,745 \cdot 10^{-5} \text{ s/m} \right]$$

b) Compressor HPC ($R = \frac{1}{2}$); $\eta_{p,HPC} = ?$; $N_{etapes} = ?$; $U = ?$

* $[(\Delta T_t)_s]_{max} = 45 \text{ K}$; $\alpha_1 = 30^\circ$; $M_1^{(1)} = 0,5$

1) Rendiment politròpic $\eta_{p,HPC}$:

$$\Pi_{HPC} = Z_{HPC}^{(\gamma_c/\gamma_c-1)} \cdot \eta_{p,HPC} \rightarrow q = 2,0156 \xrightarrow{1,4/0,4 \cdot \eta_{p,HPC}} \rightarrow \boxed{\eta_{p,HPC} = 0,896}$$

$$\ln(q) = \ln(2,0156)^{3,5 \cdot \eta_{p,HPC}}$$

$$\ln(q) = 3,5 \cdot \eta_{p,HPC} \cdot \ln(2,0156) \rightarrow \eta_{p,HPC} = \frac{\ln(q)}{3,5 \ln(2,0156)} = 0,896$$

2) Nombre d'etapes mínim:

$$Z_{HPC} = \frac{T_{t3}}{T_{t25}}; Z_{LPC} = \frac{T_{t25}}{T_{t2}}; Z_{HPC} \cdot Z_{LPC} = \frac{T_{t3}}{T_{t25}} \cdot \frac{T_{t25}}{T_{t2}} = \frac{T_{t3}}{T_{t2}}$$

De l'apartat anterior:

$$T_{t2} = T_{t0} = T_0 \left(1 + \frac{\gamma_c-1}{2} M_0^2\right) = 247,956 \text{ K}$$

$$T_{t25} = Z_{LPC} \cdot T_{t2} = 1,75967 \cdot 247,956 = 436,3206 \text{ K}$$

$$T_{t3} = Z_{HPC} \cdot T_{t25} = 2,0156 \cdot 436,3206 = 879,4478 \text{ K}$$

$$(\Delta T_t)_{total} = T_{t3} - T_{t25} = 879,4478 - 436,3206 = 443,127 \text{ K}$$

$$N_{etapes} = \frac{(\Delta T_t)_{total}}{[(\Delta T_t)_s]_{max}} = \frac{443,127}{45} = 9,847 \rightarrow \boxed{N_{etapes} = 10}$$

→ Fara falta 10 etapes i el $(\Delta T_t)_s = \frac{(\Delta T_t)_{total}}{10} = 44,3 \text{ K}$

3) - Velocitat tangencial de gir U:

* $M_1^{(1)} = 0,5 \rightarrow M_1^{(1)} = \frac{V_1^{(1)}}{\sqrt{\gamma_c R_g T_1^{(1)}}}$ $T_1^{(1)} = \frac{T_{t1}^{(1)}}{1 + \frac{\gamma_c-1}{2} M_1^{(1)2}} = \frac{436,3206}{1 + \frac{1,4-1}{2} \cdot 0,5^2} = 415,54 \text{ K}$

$$\rightarrow V_1^{(1)} = M_1^{(1)} \sqrt{\gamma_c R_g T_1^{(1)}} = 0,5 \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 415,54} = 204,306 \text{ m/s}$$

* Equació d'Euler: $c_{pc} \cdot (\Delta T_t)_s = U(v_2 - v_1) \xrightarrow{U = v_1 + v_2 \text{ (etapes repetides)}} c_{pc} \cdot (\Delta T_t)_s = U(U - 2v_1)$

$$v_1 = V_1 \sin \alpha_1 = 204,306 \cdot \sin(30^\circ) = 102,153 \text{ m/s}$$

$$U^2 - 2Uv_1 - c_{pc} \cdot (\Delta T_t)_s = 0 \rightarrow U^2 - 2 \cdot 102,153 U - 1004,5 \cdot 44,3 = 0$$

$$U = 336,53 \text{ m/s}$$

$$U = -132,23 \text{ m/s}$$

→ La velocitat tangencial de gir és igual a 23 336,53 m/s

c) Turbina LPT; 4 etapes repetides; flux entrada axial $\left\{ \begin{array}{l} v_2 = v_1 = 0 \\ \alpha_1 = \alpha_3 = 0 \end{array} \right.$; dissenyada per y_{max}

$$X = 1,25; M_T^{(1)} = 0,16 \rightarrow M_1^{(1)}; M_2^{(1)}; \alpha_2^{(1)}, R^{(1)} ?$$



$$Z_{LPT} = 0,58293 \quad Z_{LPT} = \frac{T_{t5}}{T_{t45}}; \quad Z_{HPT} = \frac{T_{t47}}{T_{t4}}$$

$$T_{t45} = Z_{HPT} \cdot T_{t4} = 0,75691 \cdot 1450 = 1097,5195 \text{ K}$$

$$T_{t5} = Z_{LPT} \cdot T_{t45} = 639,777 \text{ K}$$

$$(\Delta T_t)_{\text{total}} = T_{t45} - T_{t5} = 457,742 \text{ K}$$

$$(\Delta T_t)_{\frac{z}{4}} = \frac{(\Delta T_t)_{\text{total}}}{N_{\text{etapes}}} = \frac{457,742}{4} = 114,4356 \text{ K} = T_{t2} - T_{t3}$$

$$T_{t2}^{(1)} = T_{t1}^{(1)} = T_{t45} = 1097,5195 \text{ K}$$

$$T_{t3}^{(1)} = 1097,5195 - 114,4356 = 983,0839 \text{ K} \rightarrow Z_t = \frac{T_{t3}}{T_{t2}} = \underline{\underline{0,8957}}$$

$$y = \frac{1 - Z_t}{(8-1) M_t} = \frac{1 - 0,8957}{(1,3-1) \cdot 0,16} = \underline{\underline{0,57944}}$$

* Utilitzem taula per $X = 1,25$, s'obté: (es fa la mitjana entre els valors corresponents a $y = 0,581$; $y = 0,57792$).

$$M_1^{(1)} = \frac{0,85 + 0,86}{2} = \underline{\underline{0,855}}$$

$$\alpha_2^{(1)} = \frac{36,23411 + 36,05965}{2} = \underline{\underline{36,147^\circ}}$$

$$M_2^{(1)} = \frac{1,14266 + 1,14057}{2} = \underline{\underline{1,1416}}$$

-Grau de reacció:

$$(1-R) M_t = \frac{M_2 \sin \alpha_2}{2} \rightarrow R = 1 - \frac{M_2 \sin \alpha_2}{2 M_t} = 1 - \frac{1,1416 \sin(36,147^\circ)}{2 \cdot 0,16} = 0,414$$

$$\underline{\underline{R = 0,414}}$$

COGNOMS:

NOM:

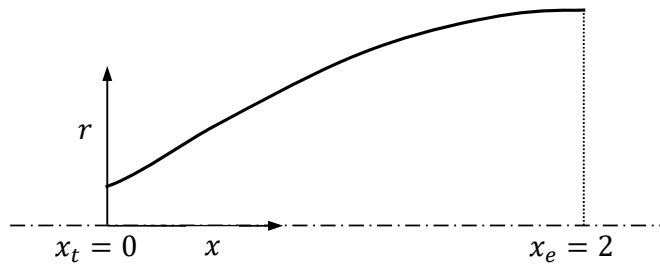
DNI:

PUNTUACIÓ: /10

PROBLEMA (10 P)

Considerar un coet de propulsant líquid LO2/RP-1 ($MW = 22 \text{ gmol}^{-1}$, $\gamma = 1.25$), sent la pressió i temperatura de cambra $p_c = 130 \text{ atm}$ i $T_c = 3580 \text{ K}$, respectivament. La tovera (axisimètrica) té la part divergent amb un radi r que varia de forma parabòlica (des de la gola $x_t = 0$ fins la sortida $x_e = 2 \text{ m}$) amb la distància axial x , segons

$$r(x) = 0.15 \left(1 + 5x - \frac{5}{4}x^2 \right) \quad 0 \leq x \leq 2 \quad x, r \text{ en m}$$

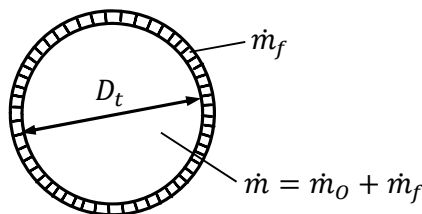


Determinar:

1. L'impuls específic operant en el buit. (2 P)
2. La contribució a l'empenyiment que realitza el tram de tovera comprès entre les estacions $x_{int} = 0.5 \text{ m}$ i $x_e = 2 \text{ m}$, suposant operació a nivell del mar ISA. (4 P)

S'estima que a la gola el flux calorífic és $q_w = 35 \text{ MWm}^{-2}$, calor que ha de ser evacuat mitjançant refrigeració regenerativa fent passar tot el cabal querosè \dot{m}_f repartit al llarg d'uns canals de secció quadrada de costat D_l disposats al llarg de la perifèria de la gola. La proporció oxigen/querosè és $\dot{m}_o/\dot{m}_f = 2.2$.

(Secció transversal de la gola)



El gas i el querosè estan separats per una làmina de coure ($k = 360 \text{ WK}^{-1}\text{m}^{-1}$) de 0.3 mm de gruix. En el costat del gas la temperatura de la paret es $T_{w_{gas}} = 800 \text{ K}$. El querosè, amb densitat $\rho_l = 800 \text{ kgm}^{-3}$, coeficient calorífic $c_l = 2000 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ i viscositat $\mu_l = 2.4 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$, s'estima que al seu pas per la gola assoleix una temperatura $T_l = 400 \text{ K}$. Aproximant la secció total de pas del querosè per $A_l = \pi D_t D_l$, i fent servir l'equació de Bartz prenent $T_e = T_l$, sense el factor $(T_e/\langle T \rangle)^{0.8-0.2w}$ i negligint el terme cinètic, es demana:

3. Determinar la temperatura de la paret al costat del líquid $T_{w_{liq}}$. (1 P)
4. Determinar la mida D_l i la velocitat del querosè u_l al seu pas per la gola. (3 P)

1. Impuls específic en el buit

$$\frac{A_e}{A_t} = 36 = \frac{\bar{m}(M_t = 1, \gamma)}{\bar{m}(M_e, \gamma)} \rightarrow \bar{m}(M_e, \gamma) = 0.01828 \rightarrow M_e = 4.4507$$

$$C_F = 1.8273 \quad c^* = 1767.5 \text{ ms}^{-1}$$

$$I_{sp} = \frac{C_F c^*}{g} = 329 \text{ s}$$

2. Contribució tram tovera

Hi ha despreniment de flux, resultant $p'_e = 0.4 \text{ atm}$, $M'_e = 4.1758$ i $A'_e/A_t = 25.6905$.
A la secció $x_{int} = 0.5 \text{ m}$ és $A_{int}/A_t = 10.1602$, donant $M_{int} = 3.4386$

$$\Delta F = (C'_{F,e} - C_{F,int}) p_c A_t = -31.06 \text{ kN}$$

$$C'_{F,e} = C_{F,vac}(M'_e) - \frac{p_a A'_e}{p_c A_t} = 1.6044 \quad C_{F,int} = C_{F,vac}(M_{int}) - \frac{p_a A_{int}}{p_c A_t} = 1.6377$$

3. Temperatura a la part del líquid

$$T_{wc} = T_{wh} - \frac{q_w \delta}{k} = 770.8 \text{ K} \quad h_l = \frac{q_w}{T_{wc} - T_l} = 94382 \text{ WK}^{-1} \text{ m}^{-2}$$

$$h_l = \frac{0.026}{D_l^{0.2}} (\rho_l u_l)^{0.8} \mu_l^{0.2} c_p \Rightarrow \frac{u_l^{0.8}}{D_l^{0.2}} = 28.8650 \text{ m}^{0.6} \text{ s}^{-0.8}$$

$$\dot{m}_f = \frac{\dot{m}}{1 + O/F} = 164.6 \text{ kgs}^{-1}$$

$$u_l D_l = \frac{\dot{m}_f}{\pi D_t \rho_l} = 0.2183 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$D_l = 0.0103 \text{ m} \quad u_l = 21.29 \text{ ms}^{-1}$$

COGNOMS:

NOM:

DNI:

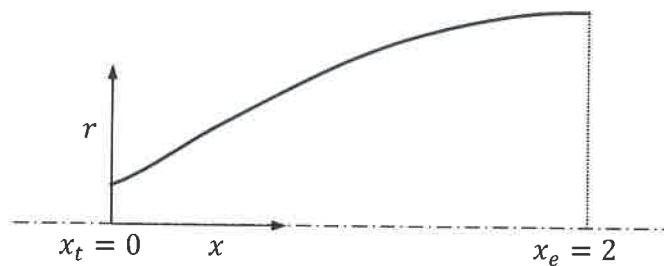
JG

PUNTUACIÓ: 6.5/10

PROBLEMA (10 P)

Considerar un coet de propulsant líquid LO2/RP-1 ($MW = 22 \text{ gmol}^{-1}$, $\gamma = 1.25$), sent la pressió i temperatura de cambra $p_c = 130 \text{ atm}$ i $T_c = 3580 \text{ K}$, respectivament. La tovera (axisimètrica) té la part divergent amb un radi r que varia de forma parabòlica (des de la gola $x_t = 0$ fins la sortida $x_e = 2 \text{ m}$) amb la distància axial x , segons

$$r(x) = 0.15 \left(1 + 5x - \frac{5}{4}x^2 \right) \quad 0 \leq x \leq 2 \quad x, r \text{ en m}$$

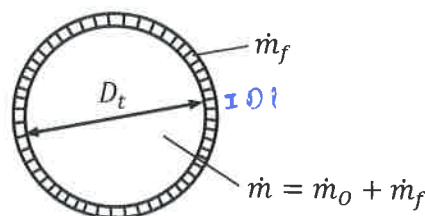


Determinar:

- ✓ 1. L'impuls específic operant en el buit. (2 P)
- ✓ 2. La contribució a l'empenyiment que realitza el tram de tovera comprès entre les estacions $x_{int} = 0.5 \text{ m}$ i $x_e = 2 \text{ m}$, suposant operació a nivell del mar ISA. (4 P)

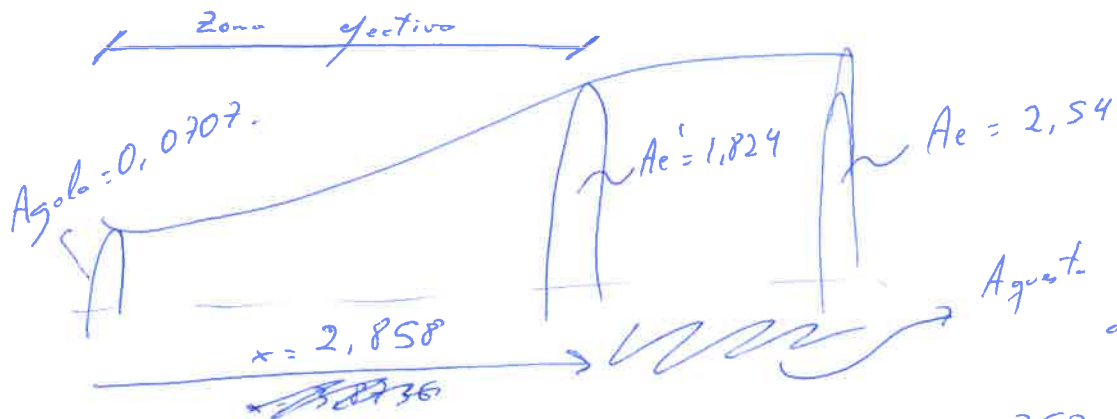
S'estima que a la gola el flux calorífic és $q_w = 35 \text{ MWm}^{-2}$, calor que ha de ser evacuat mitjançant refrigeració regenerativa fent passar tot el cabal querosè \dot{m}_f repartit al llarg d'uns canals de secció quadrada de costat D_t disposats al llarg de la perifèria de la gola. La proporció oxigen/querosè és $\dot{m}_o/\dot{m}_f = 2.2$.

(Secció transversal de la gola)



El gas i el querosè estan separats per una làmina de coure ($k = 360 \text{ WK}^{-1}\text{m}^{-1}$) de 0.3 mm de gruix. En el costat del gas la temperatura de la paret es $T_{wgas} = 800 \text{ K}$. El querosè, amb densitat $\rho_l = 800 \text{ kgm}^{-3}$, coeficient calorífic $c_l = 2000 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ i viscositat $\mu_l = 2.4 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$, s'estima que al seu pas per la gola assoleix una temperatura $T_l = 400 \text{ K}$. Aproximant la secció total de pas del querosè per $A_l = \pi D_t D_l$, i fent servir l'equació de Bartz prenent $T_e = T_l$, sense el factor $(T_e/\langle T \rangle)^{0.8-0.2w}$ i negligint el terme cinètic, es demana:

- ✓ 3. Determinar la temperatura de la paret al costat del líquid T_{wliq} . (1 P)
- ✓ 4. Determinar la mida D_l i la velocitat del querosè u_l al seu pas per la gola. (3 P)



$$\frac{Ae'}{A_T} \cdot A_T = 25.807 \cdot nr(0)^2 = 1.824 \text{ m}^2 \rightarrow r = 0.762 \text{ m} \rightarrow x = ?$$

$$0.762 = 0.15 \left(1 + 5x - \frac{5}{4}x^2 \right) \rightarrow x = 2.858 \text{ m}$$

s'ajuda d'una grua perquè en comiden que és DM es separa.

Si sabem que de $x=0$ a $x=3.8736$ m la zona efectiva que dona el Thrust $F = 1.49347 \text{ MN}$ i utilitzant l'hipòtesis que a cada secció la contribució al Thrust és la mateixa

No variació lineal?

$$\frac{2.858}{3.8736} \rightarrow 1.49347 \text{ MN}$$

$$F' = \frac{1.49347 \cdot 10^6}{3.8736} \left(\frac{2.858}{3.8736} - 0.5 \right) \rightarrow F' = 1.232 \text{ MN}$$

$F' = 1.232 \text{ MN}$

part que proporciona la torçió de $x=0.5$ a $x=2$

$$q_w = 35 \frac{\text{MW}}{\text{m}^2}$$

$$\dot{m} = \frac{P_c \cdot A_T \cdot nr(0)^2}{c^*} = 526.8 \text{ Kg/s}$$

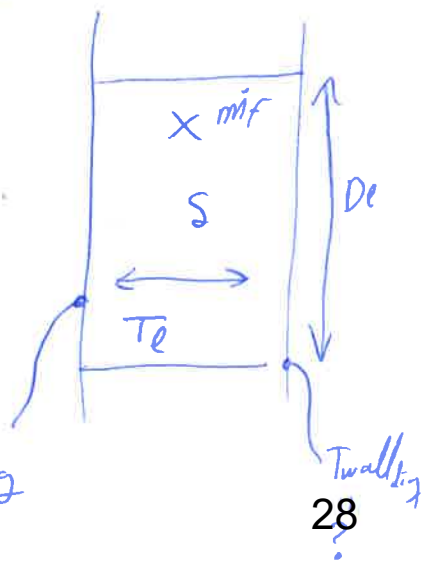
$$\delta = 0.3 \text{ mm}$$

$$\frac{\dot{m}_0}{\dot{m}} = 2.2 \rightarrow \dot{m} = \dot{m}_0 + \frac{\dot{m}_0}{2.2} \rightarrow \dot{m}_0 = 362.175 \text{ Kg/s}$$

$$K = 360 \frac{\text{W}}{\text{Km}}$$

$$\dot{m}_f = 164.625 \text{ Kg/s}$$

$$T_{\text{wall}} = 800 \text{ K}$$



$$\dot{m}_f = 164.625 \text{ Kg/s}$$

$$p_l = 800 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$$c_l = \frac{2000}{\text{Kg} \cdot \text{K}}$$

$$p_l = 2.4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3 \cdot \text{s}}$$

$$T_l = 400 \text{ K}$$

1. Is operant al buit:

JG



Suposem tovera adaptada: $\frac{A_e}{A_T} = \frac{n \cdot r (2)^2}{A_T \cdot 0,15^2} = 36$

$\gamma = 1,25$

$\frac{A_e}{A_T} = \frac{\bar{m}(1, \gamma)}{\bar{m}(M_e, \gamma)} \rightarrow \bar{m}(M_e, \gamma) = 0,01828 \rightarrow M_e = 4,45$

$CF = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \cdot \frac{\gamma M_e + \frac{1}{M_e}}{\sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2}} = 1,827$

$c^* = \frac{\sqrt{RT_c}}{\bar{m}(1, \gamma)} = 1767,43 \text{ m/s}$

$T_c = 3580 \text{ K}$

$R = \frac{8,314}{0,022} = 377,9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

$I_{sp} = \frac{F}{\dot{m}g} = \frac{P_c \cdot A_T \cdot CF}{\dot{m}g} = \frac{c^* \cdot CF}{g} = 329,16 \text{ s}$

~

2. F?

Comproven si h: ha despendiment o no

amb el del motor.

$P_c = 130 \text{ kN}$

$M_e' = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{P_c}{0,4 P_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} = 4,1757 \approx 4,18$

$\frac{A_e'}{A_T} = \frac{\bar{m}(1, \gamma)}{\bar{m}(M_e', \gamma)} = \frac{0,6581}{0,0255} = 25,807$

$\frac{A_e}{A_T} = \frac{n \cdot r (2)^2}{n r (0,15)^2} = 3,54325$
 $x = 0,5$

Observem que $\frac{A_e}{A_T} > \frac{A_e'}{A_T}$, per tant la tovera s'ha despenat.

$CF(M_e') = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \cdot \frac{\gamma M_e' + \frac{1}{M_e'}}{\sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e'^2}} = \frac{P_c \cdot A_e'}{P_c \cdot A_T} = 1,604$

$F = P_c \cdot A_T \cdot CF(M_e') = 1,49347 \text{ MN}$

← $x=0$ a $x=2$ cert
 Si suposem que cada secció de la tovera contribueix de la mateixa manera en el Thrust →

Que s'hagués de dir la contribució de força en un cert punt. Si no estés que no implica que la gola no continuï seguint en $x=0$.

3. Twilig? $q_w = k \frac{\Delta T}{s} \rightarrow \Delta T = \frac{q_w \cdot s}{k} = 29.16 \text{ K}$

$T_{\text{gas}} - T_{\text{wilig}} = \Delta T \rightarrow T_{\text{wilig}} = 770.83 \text{ K}$

1

4. $D_e?$
 $\alpha_l = \frac{0.026}{D_f^{0.2}} \left(\frac{P_c}{c^*} \right)^{0.8} \cdot \left(\frac{D_T}{D_e} \right)^{1.8} \cdot (1.0 \cdot \mu_e)^{0.2} = 24801.36 \cdot \left(\frac{0.3}{D_e} \right)^{1.8} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \right]$

$D_T = 0.3$

$q_l = \alpha_l (-T_{\text{rec}} + T_{\text{wilig}}) = 9.197 \cdot 10^6 \left(\frac{0.3}{D_e} \right)^{1.8}$

$T_{\text{rec}} = T_l + \frac{r_{4/2}}{k_{cp}}$
 despreciable

1.5

Igualen les calors com:
 $q_w \cdot \pi D_T = q_l \cdot \pi D_T \cdot D_e$

$D_e = \frac{q_w}{q_l} = \frac{35 \cdot 10^8}{9.197 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{0.3}{D_e} \right)^{1.8}} \Rightarrow D_e = 0.01253 \text{ m}$

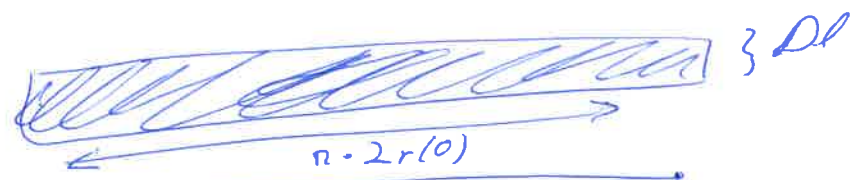
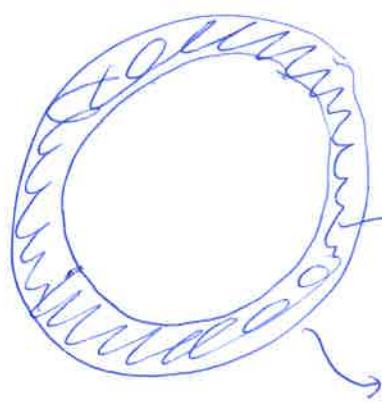
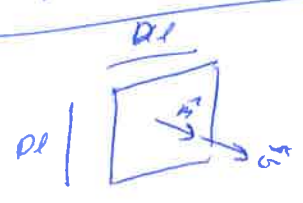
Per trobar la velocitat $u_1?$

Per continuïtat $\dot{m}_1 = \rho_1 \cdot u_1 \cdot A_1 \rightarrow u_1 = \frac{\dot{m}_1}{\rho_1 \cdot A_1}$

$u_1 = \frac{169.625}{\rho_1 \cdot A_1} = 17.425 \text{ m/s}$

$\int_C \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0$

$\rho_1 \cdot u_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot u_2 \cdot A_2$



$n \cdot 2r(0) \cdot D_e \approx A$ (aproximadament)

COGNOMS:

NOM:

DNI:

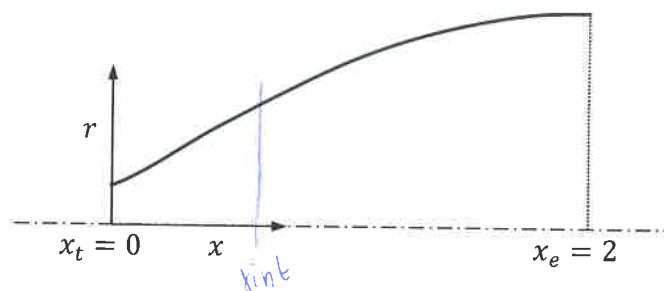
DF

PUNTUACIÓ: 8.0/10

PROBLEMA (10 P)

Considerar un coet de propulsant líquid LO2/RP-1 ($MW = 22 \text{ gmol}^{-1}$, $\gamma = 1.25$), sent la pressió i temperatura de cambra $p_c = 130 \text{ atm}$ i $T_c = 3580 \text{ K}$, respectivament. La tovera (axisimètrica) té la part divergent amb un radi r que varia de forma parabòlica (des de la gola $x_t = 0$ fins la sortida $x_e = 2 \text{ m}$) amb la distància axial x , segons

$$r(x) = 0.15 \left(1 + 5x - \frac{5}{4}x^2 \right) \quad 0 \leq x \leq 2 \quad x, r \text{ en m}$$

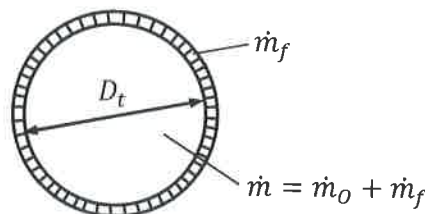


Determinar:

1. L'impuls específic operant en el buit. (2 P)
2. La contribució a l'empenyiment que realitza el tram de tovera comprès entre les estacions $x_{int} = 0.5 \text{ m}$ i $x_e = 2 \text{ m}$, suposant operació a nivell del mar ISA. (4 P)

S'estima que a la gola el flux calorífic és $q_w = 35 \text{ MWm}^{-2}$, calor que ha de ser evacuat mitjançant refrigeració regenerativa fent passar tot el cabal querosè \dot{m}_f repartit al llarg d'uns canals de secció quadrada de costat D_t disposats al llarg de la perifèria de la gola. La proporció oxigen/querosè és $\dot{m}_O/\dot{m}_f = 2.2$.

(Secció transversal de la gola)



El gas i el querosè estan separats per una làmina de coure ($k = 360 \text{ WK}^{-1}\text{m}^{-1}$) de 0.3 mm de gruix. En el costat del gas la temperatura de la paret es $T_{w_{gas}} = 800 \text{ K}$. El querosè, amb densitat $\rho_l = 800 \text{ kgm}^{-3}$, coeficient calorífic $c_l = 2000 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ i viscositat $\mu_l = 2.4 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$, s'estima que al seu pas per la gola assoleix una temperatura $T_l = 400 \text{ K}$. Aproximant la secció total de pas del querosè per $A_l = \pi D_t D_l$, i fent servir l'equació de Bartz prenent $T_e = T_l$, sense el factor $(T_e/\langle T \rangle)^{0.8-0.2w}$ i negligint el terme cinètic, es demana:

3. Determinar la temperatura de la paret al costat del líquid $T_{w_{liq}}$. (1 P)
4. Determinar la mida D_l i la velocitat del querosè u_l al seu pas per la gola. (3 P)



① LO2/RP-1 → MW = 223/mol
 δ = 1.25
 P_c = 130 atm
 T_c = 3580 K

$r(x) = 0.15 \left(1 + 5x - \frac{5}{4} x^2 \right)$ $0 \leq x \leq 2$
 x, r en m

1) I_{sp} en buit

$R = \frac{R_u}{MW} = \frac{8314}{0.022} = 377'91 \text{ J/kgK}$ $I_{sp} = \frac{F}{\dot{m}g} = \frac{C^* \cdot C_F}{g}$

$C^* = \frac{\sqrt{RT_c}}{\bar{m}(He, \delta)} = \frac{\sqrt{377'91 \cdot 3580}}{0.6581} = 1767'44 \text{ m/s}$

$\frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{\lambda R e^2}{\lambda R r^2} = \left(\frac{R_e}{R_r} \right)^2$ $R_e = r(x_e = 2) = 0.19 \text{ m}$
 $R_r = r(x_r = 0) = 0.15 \text{ m}$

$\frac{\Delta e}{\Delta t} = \left(\frac{0.19}{0.15} \right)^2 = 36 = \frac{\bar{m}(He, \delta)}{\bar{m}(He, t)} = \frac{0.6581}{\bar{m}(He, t)} \rightarrow \bar{m}(He, t) = 0.01828 \rightarrow Me = 4'45$

$(F_v(He)) = 1'8272$ $I_{sp} = \frac{C^* \cdot (F_v)}{g} = \frac{1767'44 \cdot 1'8272}{9.81} = 329'25$

$P_e = P_c \left(1 + \frac{\delta-1}{2} Me^2 \right)^{-\frac{\delta}{\delta-1}} = 25'983'08 \text{ Pa} < 0.4 P_c$
 0.4 Pa = 40520 Pa
 hi ha despressió

2) $r(x_{int} = 0.5) = R_{int} = 0.478 \text{ m}$

$\frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{\lambda R e^2}{\lambda R r_{int}^2} = \left(\frac{R_e}{R_{int}} \right)^2 = 3'545 = \frac{\bar{m}(He_{int}, t)}{\bar{m}(He, t)} \rightarrow \bar{m}(He_{int}, t) = 0.0648 \rightarrow Me_{int} = 3'44$

Com s'ha vist abans tenim despressió per tant $Me' = \sqrt{\frac{2}{\delta-1} \left[\left(\frac{P_c}{P_e \cdot 0.4} \right)^{\frac{\delta-1}{\delta}} - 1 \right]} = 4'1757$

$\frac{\Delta e'}{\Delta t} = \frac{\bar{m}(He, t)}{\bar{m}(He', t)} = \frac{0.6581}{0.0255} = 25'81 \rightarrow \Delta e' = 25'81 \cdot \Delta e = 1'82 \text{ m}^2$

Per tant si $\Delta e' = 1'82$

$\frac{\Delta e'}{\Delta t} = \frac{1'82}{\lambda 0.478^2} = 2'536 = \frac{\bar{m}(He_{int}, t)}{\bar{m}(He', t)} \rightarrow \bar{m}(He_{int}, t) = 0.06465 \approx 3'44 \text{ novena}$

$$C_F = \frac{F}{P_{int} \Delta_{int}} \quad C_F = \frac{\dot{m} v_e' + \Delta_e' (p_e' - p_a)}{P_{int} \Delta_{int}}$$

$$\frac{\dot{m}}{\Delta t} = \frac{P_c}{c^*} = \frac{130 \cdot 101325}{1767144} = 745273 \frac{kg}{sm^2} \quad \dot{m} = \Delta t \cdot \frac{\dot{m}}{\Delta t} = 20'15^2 \cdot 746273 = 526'802 \frac{kg}{s}$$

$$T_e' = T_c \cdot \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e'^2} = 1125'94 K \quad v_e' = \sqrt{\gamma R T_e'} \cdot M_e' = \sqrt{1'25 \cdot 377'91 \cdot 1125'94} \cdot 4'1757 = 3045'34 \frac{m}{s}$$

$$\Delta_e' = 1'82 m^2 \quad p_e' = 0'4 p_a = 40530 Pa$$

$$\Delta_{int} = 0'7178 m^2 \quad p_a = 101325 Pa$$

$$P_{int} = P_c \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{int}^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$= 130 \cdot 101325 \left(1 + \frac{1'25-1}{2} 3'44^2\right)^{-\frac{1'25}{1'25-1}} = 140637'82 Pa$$

$$C_F = \frac{526'802 \cdot 3045'34 + 1'82 (40530 - 101325)}{140637'82 \cdot 0'7178} = 14'7959$$

$$F = C_F \cdot P_{int} \Delta_{int} = 1489'919 kN$$

ΔPARTAT 2 i 4 AL SEGÜENT FULL

$$q_w = 35 MW/m^2$$

$$\dot{m} = \dot{m}_o + \dot{m}_f$$

$$T_{w,ges} = 800 K$$

$$T_e = 400 K$$

$$\frac{\dot{m}_o}{\dot{m}_f} = 2'2$$

$$k = 360 W/km$$

$$\rho_e = 800 kg/m^3$$

$$\Delta_e = 2 \Delta_e' \Delta_e$$

$$\delta = 0'3 mm$$

$$\delta = 0'3 mm$$

$$c_e = 2000 J/kg K$$

$$T_e = T_e$$

$$\rho_e = 2'4 \cdot 10^{-3} kg/m s$$

3) T_{w,liquid} a la gola

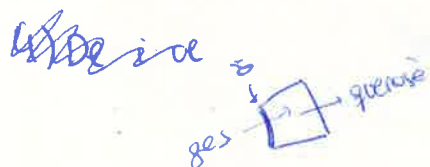
$$q_w = k \cdot \frac{\Delta T}{\delta}$$

$$\Delta T = \frac{\delta \cdot q_w}{k} = \frac{0'0003 m \cdot 35 \cdot 10^6 W/m^2}{360 W/km} = 29'16 K$$

$$\Delta T = T_{w,ges} - T_{w,liquid} = 29'16$$

$$800 K$$

$$T_{w,liquid} = 770'83 K$$





2) $r(x_{int} = 0.15) = R_{int} = 0.478$

De l'apertat anterior

$P_e = P_c \left(1 + \frac{d-1}{2} Me^2\right)^{\frac{d}{d-1}} = 25983.08 < 40530 Pa$

↳ hi ha despreniment

$Me' = \sqrt{\frac{2}{d-1} \left[\left(\frac{P_c}{0.4 P_e} \right)^{\frac{d-1}{d}} - 1 \right]} = 4.1757$

$\frac{\Delta e'}{\Delta t} = \frac{\bar{m} (M_t = 4d)}{\bar{m} (Me', d)} = \frac{0.6581}{0.0255} = 25.81$

$C_F = (C_{floc} (Me')) - \frac{P_c}{P_c} \frac{\Delta e'}{\Delta t} = 1.8024 - \frac{40530}{130 \cdot 101325} \cdot 25.81 = 1.72298$

$F_{tot} = C_F \cdot P_c \cdot \Delta t = 1.72298 \cdot 130 \cdot 101325 \cdot 20 \cdot 15^2 = 1604252 N$

Si ara tenim



$x_{int} = 0.15$

$\Delta e = \frac{\Delta_{int}}{\Delta t} = \frac{7 \cdot 0.478^2}{7 \cdot 0.15^2} = 10.15 = \frac{\bar{m} (M_t = 4d)}{\bar{m} (M_{int}, d)} \rightarrow \bar{m} (M_{int}, d) = 0.0648$
 \downarrow
 $M_{int} = 3.44$

$P_{int} = P_c \left(1 + \frac{d-1}{2} M_{int}^2\right)^{\frac{d}{d-1}} = 140637.83 Pa > 0.4 P_c = 40530 Pa$

$C_{F_{int}} = (C_{floc} (M_{int})) - \frac{P_c}{P_c} \frac{\Delta_{int}}{\Delta t} = 1.7161 - \frac{40530}{130 \cdot 101325} \cdot 10.15 = 1.6849$

$F_{int} = C_{F_{int}} \cdot P_c \cdot \Delta t = 1.6849 \cdot 130 \cdot 101325 \cdot 20 \cdot 0.15^2 = 1568796.1045 N$

$F_{0.5-2} = F_{tot} - F_{int} = 1604252 - 1568796 = 35456 N$

2

4) $De, ve?$

$q_w = \frac{0.026}{De^{0.2}} (P_e ve)^{0.8} \rho_e c_e (T_{aw} - T_w)$

~~$h_g = \frac{0.026}{De^{0.2}} \left(\frac{P_c}{\rho} \right)^{0.8} \left(\frac{De}{\rho} \right)^{1.8} \left(\frac{\rho}{\rho_e} \right)^{0.2} \left(\frac{T_e}{T_w} \right)^{0.8} \rho_e c_e$~~

~~$h_g = \frac{0.026}{(2 \cdot 0.15)^{0.2}} \left(\frac{130 \cdot 101325}{176749} \right)^{0.8} 2000 \cdot (2.4 \cdot 10^3)^{0.2} = 2980.125 W/m^2K$~~

$$T_{aw} = T_u + r \frac{v_e^2}{2c} = 400K$$

$$T_w = \Delta T = 291.6$$

$$T_{aw} - T_w = \frac{q_w}{hg} = \frac{35 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2}{hg} = 370.84$$

$$\rho_e v_e = \frac{\dot{m} f}{\Delta r} = \frac{\dot{m} f}{\pi D \Delta r}$$

$$q_w = \frac{0.026}{D_e^{0.12}} (\rho_e v_e)^{0.8} \mu_e^{0.2} c (T_{aw} - T_w)$$

$$35 \cdot 10^6 = \frac{L}{D_e^{0.12}} \left(\frac{159.63}{\lambda \cdot 2 \cdot 0.15 D_e} \right)^{0.8} (\lambda \cdot 2 \cdot 10^{-3})^{0.2} \cdot 2000 \cdot 370.84$$

$$\boxed{D_e = 0.01 \text{ m}}$$

$$\rho_e v_e = \frac{\dot{m} f}{\Delta r}$$

$$\dot{m} = \Delta t \cdot \frac{\dot{m}}{\Delta t} = \lambda (0.15^2) \cdot \frac{130 - 101.35}{1767.44} = 526.8 \text{ kg/s}$$

$$\dot{m} = \dot{m}_0 + \dot{m} f = 2.2 \dot{m} f + \dot{m} f = 3.3 \dot{m} f \rightarrow \dot{m} f = 159.63 \text{ kg/s}$$

$$\dot{m}_0 = 2.2 \dot{m} f$$

$$\boxed{v_e = \frac{\dot{m} f}{\rho_e \pi D \Delta r} = \frac{159.63}{800 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 0.15 \cdot 0.01} = 21.17 \text{ m/s}}$$

COGNOMS:

NOM:

DNI:

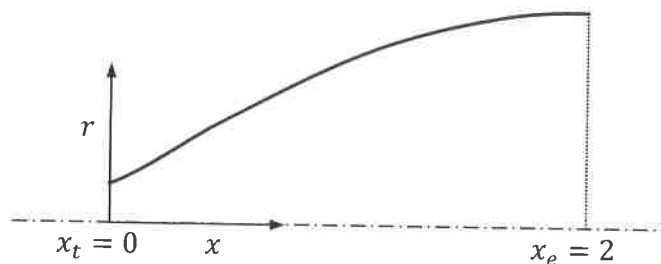
IG

PUNTUACIÓ: 10/10

PROBLEMA (10 P)

Considerar un coet de propulsant líquid LO2/RP-1 ($MW = 22 \text{ gmol}^{-1}$, $\gamma = 1.25$), sent la pressió i temperatura de cambra $p_c = 130 \text{ atm}$ i $T_c = 3580 \text{ K}$, respectivament. La tovera (axisimètrica) té la part divergent amb un radi r que varia de forma parabòlica (des de la gola $x_t = 0$ fins la sortida $x_e = 2 \text{ m}$) amb la distància axial x , segons

$$r(x) = 0.15 \left(1 + 5x - \frac{5}{4}x^2 \right) \quad 0 \leq x \leq 2 \quad x, r \text{ en m}$$

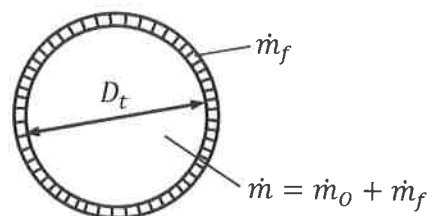


Determinar:

1. L'impuls específic operant en el buit. (2 P)
2. La contribució a l'empenyiment que realitza el tram de tovera comprès entre les estacions $x_{int} = 0.5 \text{ m}$ i $x_e = 2 \text{ m}$, suposant operació a nivell del mar ISA. (4 P)

S'estima que a la gola el flux calorífic és $q_w = 35 \text{ MWm}^{-2}$, calor que ha de ser evacuat mitjançant refrigeració regenerativa fent passar tot el cabal querosè \dot{m}_f repartit al llarg d'uns canals de secció quadrada de costat D_l disposats al llarg de la perifèria de la gola. La proporció oxigen/querosè és $\dot{m}_o/\dot{m}_f = 2.2$.

(Secció transversal de la gola)



El gas i el querosè estan separats per una làmina de coure ($k = 360 \text{ WK}^{-1}\text{m}^{-1}$) de 0.3 mm de gruix. En el costat del gas la temperatura de la paret es $T_{w_{gas}} = 800 \text{ K}$. El querosè, amb densitat $\rho_l = 800 \text{ kgm}^{-3}$, coeficient calorífic $c_l = 2000 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ i viscositat $\mu_l = 2.4 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$, s'estima que al seu pas per la gola assoleix una temperatura $T_l = 400 \text{ K}$. Aproximant la secció total de pas del querosè per $A_l = \pi D_t D_l$, i fent servir l'equació de Bartz prenent $T_e = T_l$, sense el factor $(T_e/\langle T \rangle)^{0.8-0.2w}$ i negligint el terme cinètic, es demana:

3. Determinar la temperatura de la paret al costat del líquid $T_{w_{liq}}$. (1 P)
4. Determinar la mida D_l i la velocitat del querosè u_l al seu pas per la gola. (3 P)

$$M_w = 22 \frac{g}{mol}$$

$$r(x) = 0,15 \left(1 + 5x - \frac{5}{4}x^2 \right) \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$\gamma = 1,25$$

$$P_c = 130 \text{ atm}$$

$$T_c = 3380 \text{ K}$$

①

$$A_t = \pi r_t^2 = 0,0707 \text{ m}^2$$

$$A_e = \pi r_e^2 = \pi \cdot 0,9^2 = 2,545 \text{ m}^2$$

$$\boxed{\frac{A_e}{A_t} = 36}$$

$$\bar{m}(M_e, \gamma) = \frac{\bar{m}(M_e=1,8)}{A_e/A_t} = \frac{0,6581}{36} = 0,0183 \Rightarrow \boxed{M_e = 4,45}$$

$$R = \frac{8,314}{0,022} = 377,9 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} = R$$

$$c^* = \frac{\sqrt{R T_c}}{\bar{m}(M_e=1,8)} = \boxed{1767,43 \frac{\text{m}}{\text{s}} = c^*}$$

$$C_F = (C_F)_{\text{vac}} = 1,9272$$

↑
M_e=4,45

(C_F)_{vac} (statut de terres)

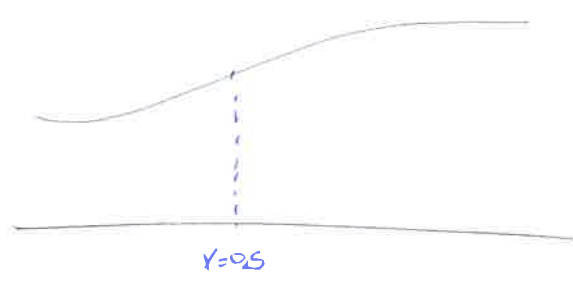
$$F = C_F \cdot P_c \cdot A_e = 1,9272 \cdot 130 \cdot 101325 \cdot 0,0707 = \boxed{1701,63 \text{ kN} = F}$$

$$\dot{m} = \frac{P_c A_e}{c^*} = \frac{130 \cdot 101325 \cdot 0,0707}{1767,43} = \boxed{526,9 \frac{\text{kg}}{\text{s}} = \dot{m}}$$

$$I_{sp} = \frac{F}{\dot{m} g} = \frac{1701,63 \cdot 10^3}{526,9 \cdot 9,81} = \boxed{329 \text{ (s)} = I_{sp}}$$

2

②.



$P_a = 1 \text{ atm}$

1- Calcular la velocidad total:

$u_e = 4,45$ (calculat a ~~pe~~ l'apertur anterior)

$$P_e = P_c \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} u_e^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0,256 \text{ atm} < 0,4 \text{ Pa}$$

com que ~~des~~ $P_e < 0,4 P_a$, el flux e desordenat, i $P_e = 0,4 P_a$.

$$u_e = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{P_c}{0,4 P_a} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} = 4,176$$

$u_e \approx 4,18$

$$C_f = (C_f)_{oc} - \frac{P_a}{P_c} \frac{\bar{m}(u_e=4,17)}{\bar{m}(u_e, \gamma)} = 1,8024 - \frac{1}{130} \frac{0,6581}{0,0255} \rightarrow$$

$\Rightarrow C_f = 1,6039$

$$F = C_f \cdot P_c \cdot A_c = 1,6039 \cdot 130 \cdot 101325 \cdot 0,0707 = \boxed{1493676,9 \text{ N} = \bar{F}_{\text{tot}}}$$

2- Calculeu l'empenta desada ^{IG} al primer tram (fins $x=0,5m$).

$A_e = 0,0707 \text{ m}^2$

$A_e = \pi r^2 = \pi \cdot 0,478^2 = 0,718 \text{ m}^2$ $\left\{ \frac{A_e}{A_e} = \frac{0,718}{0,0707} = 10,16 \right.$

~~\bar{m}~~ $\bar{m}(M_e, \gamma) = \frac{\bar{m}(M_e=1,7)}{A_e/A_e} = \frac{0,6581}{10,16} = 0,0648 \Rightarrow$

$P_e = P_e \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1,39 \text{ atm} > 0,4 P_e$
 No hi ha despressió.

$\Rightarrow M_e = 3,44$

$C_F = 1,7161 - \frac{1}{130} \frac{0,6581}{0,0648} = 1,638$

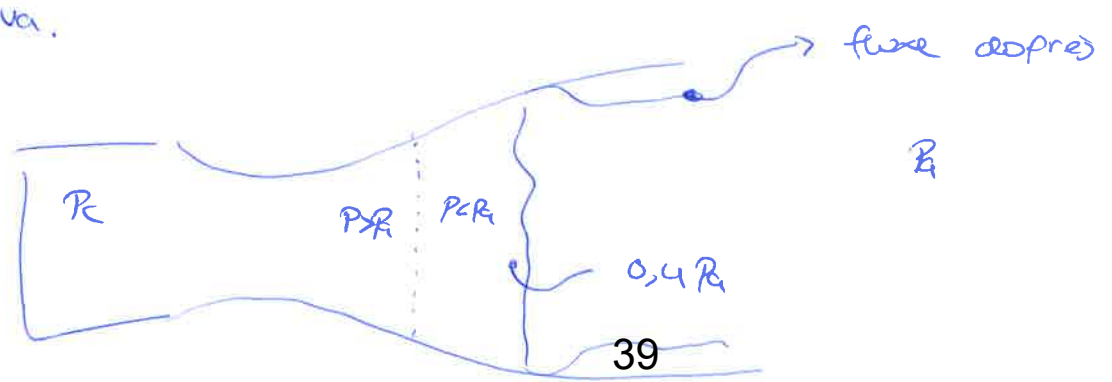
4

$F_1 = C_F \cdot P_e \cdot A_e = 1,638 \cdot 130 \cdot 101325 \cdot 0,0707 = 1325412,97 \text{ N} = F_1$

$F_2 = F_{tot} - F_1 = 1493676,9 - 1325412,97 = -31736,07 \text{ N}$

Observa que la contribució a l'empentament que realitza el tram de tuba comprès entre les seccions $x_{in}=0,5m$ i $x_e=2m$ és negativa!!

Això es deu a que la tuba està molt ~~sob~~ sobreeixpancionada, i ~~per~~ a partir de ~~cert~~ cert punt la pressió és inferior a la exterior i l'empenta resultant ~~és~~ a partir d'aquest punt és negativa.



③.

$$q_{kw} = 35 \frac{MW}{m^2}$$

$$\frac{m_o}{m_f} = 2,2$$

$$k = 360 \frac{W}{K \cdot m}$$

$$\delta = 0,3 \text{ mm}$$

$$T_{\text{gas}} = 800 \text{ K}$$

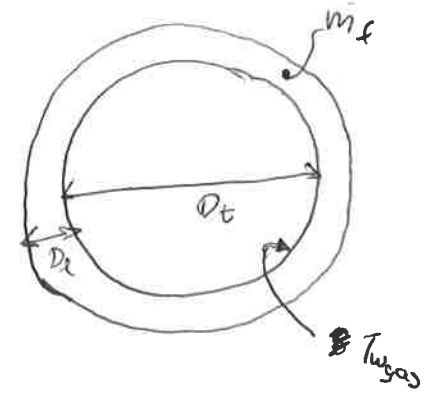
$$l_e = 800 \frac{kg}{m^3}$$

$$G = 2000 \text{ J/kgW}$$

$$\mu_e = 2,4 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{m \cdot s}$$

$$T_e = 400 \text{ K}$$

$$A_e = \pi D_e D_i$$



$$q_{kw} = k \frac{T_{\text{gas}} - T_{\text{wall}}}{\delta} \Rightarrow T_{\text{wall}} = - \left(\frac{q_{kw} \delta}{k} - T_{\text{gas}} \right) =$$

$$= - \left(\frac{35 \cdot 10^6 \cdot 0,3 \cdot 10^{-3}}{360} - 800 \right) = \boxed{770,8 \text{ K} = T_{\text{wall}}} \quad \downarrow$$

④.

$$h_g = \frac{q_{kw}}{T_e - T_{\text{wall}}} = \frac{35 \cdot 10^6}{770,8 - 400} = \boxed{94390,5 \frac{W}{m^2 \cdot K} = h_g}$$

$$h_g = \frac{0,026}{D_e^{0,2}} (l_e \mu_e)^{0,8} C_p \mu_e^{1,42} \quad (1)$$

$$m_{\text{tot}} = m_o + m_f = 2,2 m_f + m_f = 3,2 m_f$$

Resultat de depart 4

$$m_{\text{tot}} = 526,9 \frac{kg}{s} \Rightarrow m_f = 164,66 \frac{kg}{s}$$

continuitat:

$$m_f = A_e l_e u_e = \pi D_e D_i l_e u_e = m_{if}$$

$$\boxed{m_{if} = \pi D_e D_i l_e u_e} \quad (2)$$

Testim das equações (1), (2) e das incógnitas

(u_e, D_e) .

1)

$$94390,5 = \frac{0,026}{D_e^{0,2}} P_e^{0,8} u_e^{0,8} C_e / u_e^{0,2} \Rightarrow$$

$$C_e = 2000 \frac{f}{\text{kg} \cdot \text{m}}, \quad u_e = 24 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$$

$$P_e = 800 \text{ N/m}^3$$

$$\Rightarrow 94390,5 = u_e^{0,8} \cdot \frac{3269,77}{D_e^{0,2}} \Rightarrow D_e^{0,2} = u_e^{0,8} \cdot 0,0346409$$

2)

$$16466 = \pi \cdot 0,3 \cdot D_e \cdot 800 \cdot u_e \Rightarrow D_e = \frac{0,2184}{u_e}$$

\Downarrow

$$\left(\frac{0,2184}{u_e} \right)^{0,2} = u_e^{0,8} \cdot 0,0346409 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,73766 = u_e^{0,8} \cdot 0,0346409 \cdot u_e^{0,2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u_e = 21,29 \text{ m/s}}$$

$$D_e = \frac{0,2184}{21,29} = \boxed{0,0103 \text{ m} = D_e}$$

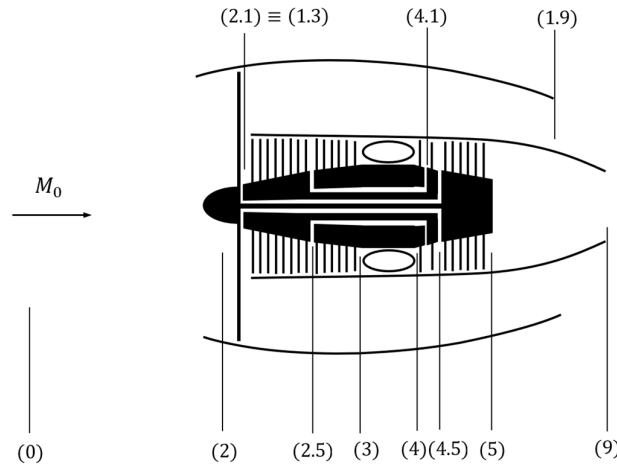
Teamwork assignment (maximum 3 people)

Deadline: 23 April 2021

Description

Consider a three-spool turbofan with convergent nozzles, as depicted in the figure below, according to the following arrangement:

- Low-Pressure Compressor (fan) between stations (2) and (2.1) \equiv (1.3), driven by a Low-Pressure Turbine between stations (4.5) and (5).
- Intermediate-Pressure Compressor between stations (2.1) and (2.5), driven by an Intermediate-Pressure Turbine between stations (4.1) and (4.5).
- High-Pressure Compressor between stations (2.5) and (3), driven by a High-Pressure Turbine between stations (4) and (4.1).



The following component efficiencies will be assumed:

π_d	η_{LPC}	η_{IPC}	η_{HPC}	π_b	η_b	η_{HPT}	η_{IPT}	η_{LPT}	η_{mH}	η_{mI}	η_{mL}	π_{np}	π_{ns}
0.98	0.89	0.88	0.89	0.96	0.99	0.91	0.91	0.93	0.993	0.995	0.997	0.99	0.99

For a flight condition of $M_0 = 0.84$ at an altitude of 11000 m ISA, and assuming a turbine inlet temperature $T_{t4} = 1450 K$, the following is requested:

1. Find a set of parameters α , π_{LPC} , π_{IPC} , π_{HPC} that give reasonably good values of both the specific thrust F/\dot{m} and specific impulse I_{sp} .
2. Analyze and plot the sensibility of F/\dot{m} and I_{sp} to small variations of each parameter in a range about its nominal value, keeping constant the rest of them.
3. According to the results of question 2), select a new set of values for α , π_{LPC} , π_{IPC} , π_{HPC} , and compute the variation of F/\dot{m} and I_{sp} .
4. If all the parameters are kept constant, except for the fan pressure ratio π_{LPC} , that is free to vary in a certain range, compute the thermal, propulsive and overall efficiencies against π_{LPC} .

Assume $\gamma_c = 1.4$, $\gamma_t = 1.3$, $R_g = 287 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ and $h = 43 \text{ MJ kg}^{-1}$.

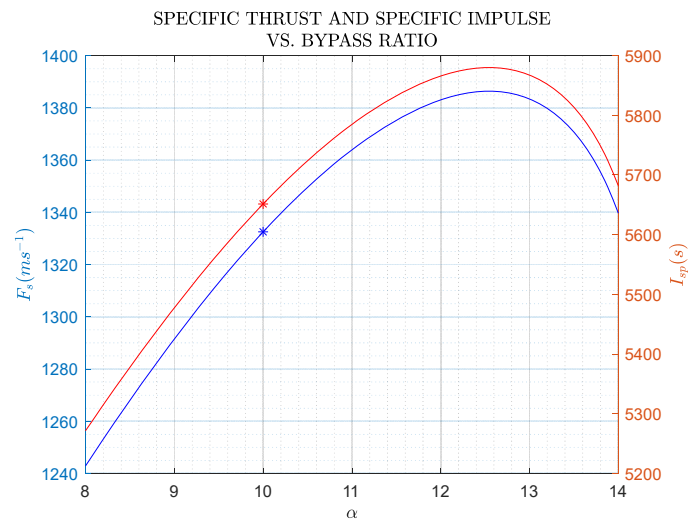
1. Set of “good” parameters (think of it a little bit, but not too much)

$$\alpha_{ref} = 10 \quad \pi_{LPC_{ref}} = 1.5 \quad \pi_{IPC_{ref}} = 6 \quad \pi_{HPC_{ref}} = 5$$

$$F_s = \frac{F}{\dot{m}} = 1332.5 \text{ms}^{-1} \quad I_{sp} = \frac{F_s}{f g_0} = 5651.6 \text{ s}$$

2. Sensibility of F_s and I_{sp} to small deviations from the reference parameters.

- a. Bypass ratio

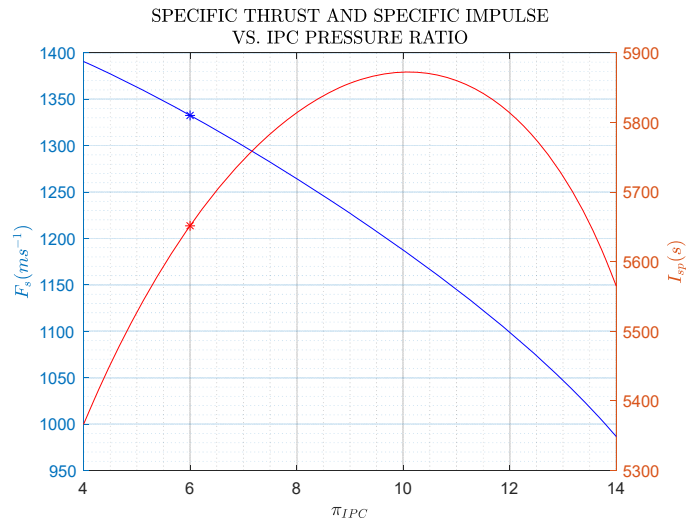


It must be noted that the graph shows the same trend for both F_s and I_{sp} , because the fuel mass fraction f is the same, regardless of the value of α .

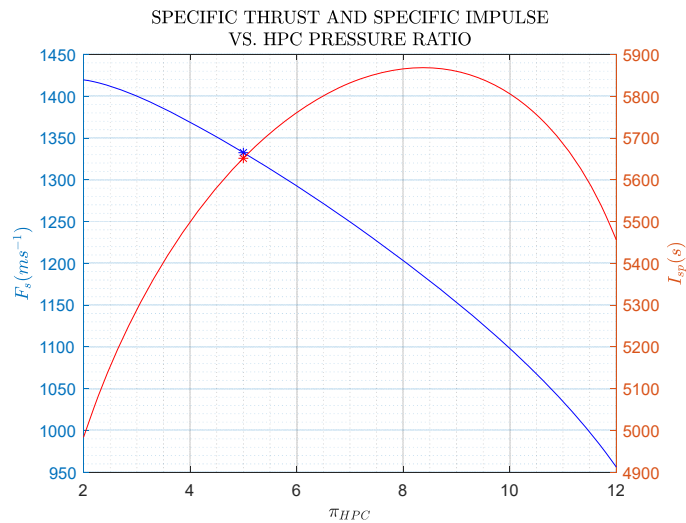
- b. LPC pressure ratio



c. IPC pressure ratio



d. HPC pressure ratio



3. New set of parameters

The specific impulse is the measure of most concern in commercial airplane, so aiming at an improvement of economy, and accounting for the trends shown in the above graphs (and with some trial and error) the following set of parameters is chosen

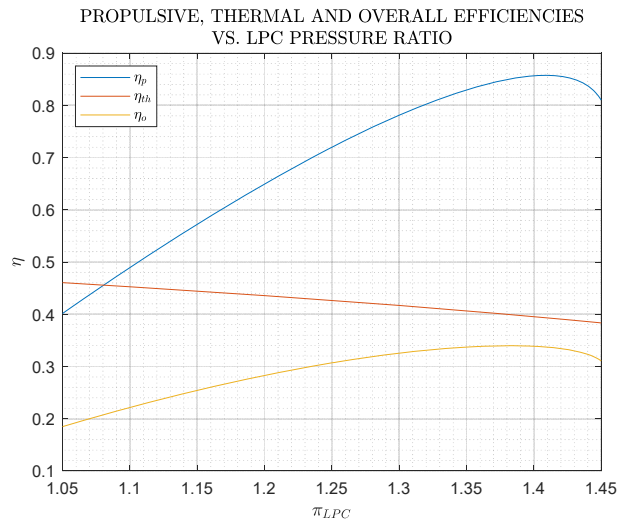
$$\alpha_{new} = 14.00 \quad \pi_{LPC_{new}} = 1.38 \quad \pi_{IPC_{new}} = 12 \quad \pi_{HPC_{new}} = 4.00$$

$$F_s = \frac{F}{\dot{m}} = 1269.1 \text{ ms}^{-1} \rightarrow -4.76\% \quad I_{sp} = \frac{F_s}{f g_0} = 6007.8 \text{ s} \rightarrow +6.30\%$$

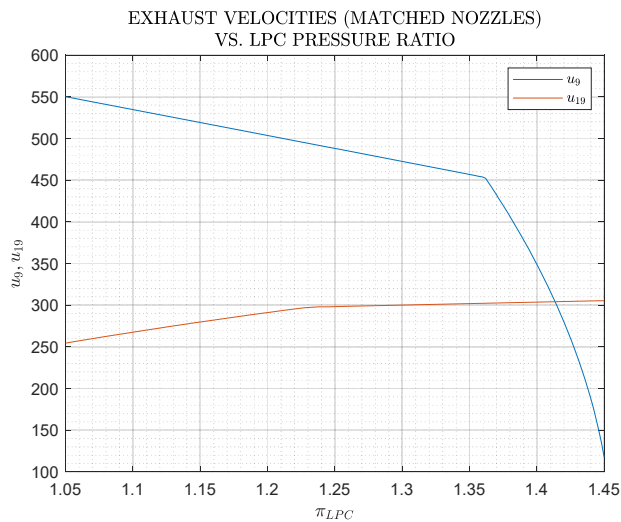
The loss of specific thrust simply means that the engine should be a little bit bigger to manage a slightly greater air mass flow to produce the same thrust. But this is of little concern in commercial airplanes.

5. Variation of thermal, propulsive and overall efficiencies Vs. LPC pressure ratio

For the new set of parameters $\alpha_{new} = 14.00$, $\pi_{IPC_{new}} = 12$, $\pi_{HPC_{new}} = 4.00$



Although it was not explicitly requested in the stamen, it is worth noting that the fan pressure ratio corresponding to the peak of propulsive efficiency doesn't coincide exactly with the fan pressure ratio that gives equal exhaust velocities, simply because the bypass nozzle is not matched to ambient pressure (but the primary nozzle is).





Laboratori d'Enginyeria Acústica i Mecànica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA, BARCELONATECH

Assignment. Three-spool turbofan parameters analysis.

Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials

Autors



IS y GLL

Professor

Lizandra Dalmases, Josep Oriol

ESCOLA SUPERIOR D' ENGINYERIES INDUSTRIAL, AEROESPACIAL I AUDIOVISUAL
DE TERRASSA (ESEIAAT)

Terrassa, Abril 2021

Índex

1	Initial set of parameters α , π_{LPC} , π_{IPC} and π_{HPC}	2
2	Specific thrust and specific impulse	5
3	New set of parameters α , π_{LPC} , π_{IPC} and π_{HPC}	7
4	Thermal, propulsive and overall efficiencies	10

1 Initial set of parameters α , π_{LPC} , π_{IPC} and π_{HPC}

Find a set of parameters α , π_{LPC} , π_{IPC} and π_{HPC} that give reasonably good values of both the specific thrust F/\dot{m} and specific impulse I_{sp} .

Els valors del impuls específic i del empenyiment específic s'han obtingut a partir d'un model de turbofan de tres eixos. D'entre els diferents motors que s'han desenvolupats s'ha escollit el *Rolls-Royce Trent 800* per la seva comercialització i per ser un dels turbofans amb més anys de desenvolupament. Aquest presenta un impuls específic de 6400s i un empenyiment específic de $1450 \frac{N}{kg/s}$ (valor que pot variar en funció d'algunes especificacions del motor).

El problema del turbofan plantejat en l'enunciat es pot resoldre segons:

AMBIENT AND INLET:

$$\theta_0 = 1 + \frac{\gamma_c - 1}{2} M_0^2 \quad (1)$$

$$\delta_0 = \theta_0^{\frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1}} \quad (2)$$

$$T_{t0} = \theta_0 T_0 \quad (3)$$

on $T_0 = 288.15 - 0.0065H$.

COMPRESSOR:

$$\tau_{LPC} = 1 + \frac{1}{\eta_{LPC}} (\pi_{LPC}^{\frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c}} - 1); \quad (4)$$

$$\tau_{IPC} = 1 + \frac{1}{\eta_{IPC}} (\pi_{IPC}^{\frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c}} - 1); \quad (5)$$

$$\tau_{HPC} = 1 + \frac{1}{\eta_{HPC}} (\pi_{HPC}^{\frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c}} - 1); \quad (6)$$

$$\tau_c = \tau_{LPC} \tau_{IPC} \tau_{HPC} \quad (7)$$

COMBUSTOR:

$$f = \frac{c_{pt} T_{t4} - c_{pc} T_{t0} \tau_c}{\eta_b h - c_{pt} T_{t4}} \quad (8)$$

on $c_{pc} = \frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1} R$ i $c_{pt} = \frac{\gamma_t}{\gamma_t - 1} R$.

TURBINE

$$\tau_{HPT} = 1 - \frac{1}{\eta_{mH}} \frac{1}{1+f} \frac{c_{pc}}{c_{pt}} \frac{T_{t0}}{T_{t4}} \tau_{LPC} \tau_{IPC} (\tau_{HPC} - 1); \quad (9)$$

$$\tau_{IPT} = 1 - \frac{1}{\eta_{mI}} \frac{1}{1+f} \frac{c_{pc}}{c_{pt}} \frac{T_{t0}}{T_{t4}} \frac{\tau_{LPC}}{\tau_{HPC}} (\tau_{IPC} - 1); \quad (10)$$

$$\tau_{LPT} = 1 - \frac{1}{\eta_{mL}} \frac{1+\alpha}{1+f} \frac{c_{pc}}{c_{pt}} \frac{T_{t0}}{T_{t4}} \frac{1}{\tau_{IPC} \tau_{HPC}} (\tau_{LPC} - 1); \quad (11)$$

$$\tau_t = \tau_{HPT} \tau_{IPT} \tau_{LPT} \quad (12)$$

$$\pi_{HPT} = \left(1 - \frac{1}{\eta_{HPT}} (1 - \tau_{HPT})\right)^{\frac{\gamma_t}{\gamma_t - 1}} \quad (13)$$

$$\pi_{IPT} = \left(1 - \frac{1}{\eta_{IPT}} (1 - \tau_{IPT})\right)^{\frac{\gamma_t}{\gamma_t - 1}} \quad (14)$$

$$\pi_{LPT} = \left(1 - \frac{1}{\eta_{LPT}} (1 - \tau_{LPT})\right)^{\frac{\gamma_t}{\gamma_t - 1}} \quad (15)$$

FAN NOZZLE:

$$\frac{p_{t19}}{p_0} = \delta_0 \pi_d \pi_{LPC} \pi_{ns} \quad (16)$$

on $p_0 = 101325 \left(\frac{288.15}{T_0}\right)^{5.256}$.

$$M_{19} = \sqrt{\frac{2}{\gamma_c - 1} \left(\left(\frac{p_{t19}}{p_0}\right)^{\frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c}} - 1 \right)} \quad (17)$$

si $M_{19} \geq 1 \Rightarrow M_{19} = 1$ i:

$$\frac{p_{19}}{p_0} = \frac{p_{t19}}{p_0} \left(\frac{2}{\gamma_c + 1}\right)^{\frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1}} \quad (18)$$

si $M_{19} < 1 \Rightarrow \frac{p_{19}}{p_0} = 1$

$$T_{19} = \frac{\tau_{LPC} T_{t0}}{1 + \frac{\gamma_c - 1}{2} M_{19}^2} \quad (19)$$

$$u_{19} = M_{19} \sqrt{\gamma_c R T_{19}} \quad (20)$$

TURBOJET NOZZLE FAN NOZZLE:

$$\frac{p_{t9}}{p_0} = \delta_0 \pi_d \pi_{LPC} \pi_{IPC} \pi_{HPC} \pi_b \pi_{HPT} \pi_{IPT} \pi_{LPT} \pi_{np} \quad (21)$$

$$M_9 = \sqrt{\frac{2}{\gamma_t - 1} \left(\left(\frac{p_{t9}}{p_0} \right)^{\frac{\gamma_t - 1}{\gamma_t}} - 1 \right)} \quad (22)$$

si $M_9 \geq 1 \Rightarrow M_9 = 1$ i:

$$\frac{p_9}{p_0} = \frac{p_{t9}}{p_0} \left(\frac{2}{\gamma_t + 1} \right)^{\frac{\gamma_t}{\gamma_t - 1}} \quad (23)$$

si $M_9 < 1 \Rightarrow \frac{p_9}{p_0} = 1$

$$T_9 = \frac{\tau_t T_{t4}}{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_9^2} \quad (24)$$

$$u_9 = M_9 \sqrt{\gamma_t R T_9} \quad (25)$$

SPECIFIC THRUST:

$$\frac{F_p}{\dot{m}} = (1 + f)u_9 - M_0 \sqrt{\gamma_c R T_0} + (1 + f) \frac{R T_9}{u_9} \left(1 - \frac{p_0}{p_9} \right) \quad (26)$$

$$\frac{F_s}{\dot{m}} = \alpha (u_{19} - M_0 \sqrt{\gamma_c R T_0} + \frac{R T_{19}}{u_{19}} \left(1 - \frac{p_0}{p_{19}} \right)) \quad (27)$$

$$\frac{F}{\dot{m}} = \frac{F_p}{\dot{m}} + \frac{F_s}{\dot{m}} \quad (28)$$

SPECIFIC IMPULSE

$$I_{sp} = \frac{1}{c_s g} \quad (29)$$

on $c_s = \frac{f}{F/\dot{m}}$ i g és l'acceleració gravitatòria.

A partir d'aquí la configuració inicial dels quatre paràmetres és la següent:

α	π_{LPC}	π_{IPC}	π_{HPC}
7.5	1.5098 \simeq 1.51	4.9995 \simeq 5	6.9995 \simeq 7

TAULA 1: Configuració inicial dels paràmetres.

2 Specific thrust and specific impulse

Analyze and plot the sensibility of F/\dot{m} and I_{sp} to small variations of each parameter in a range about its nominal value, keeping constant the rest of them.

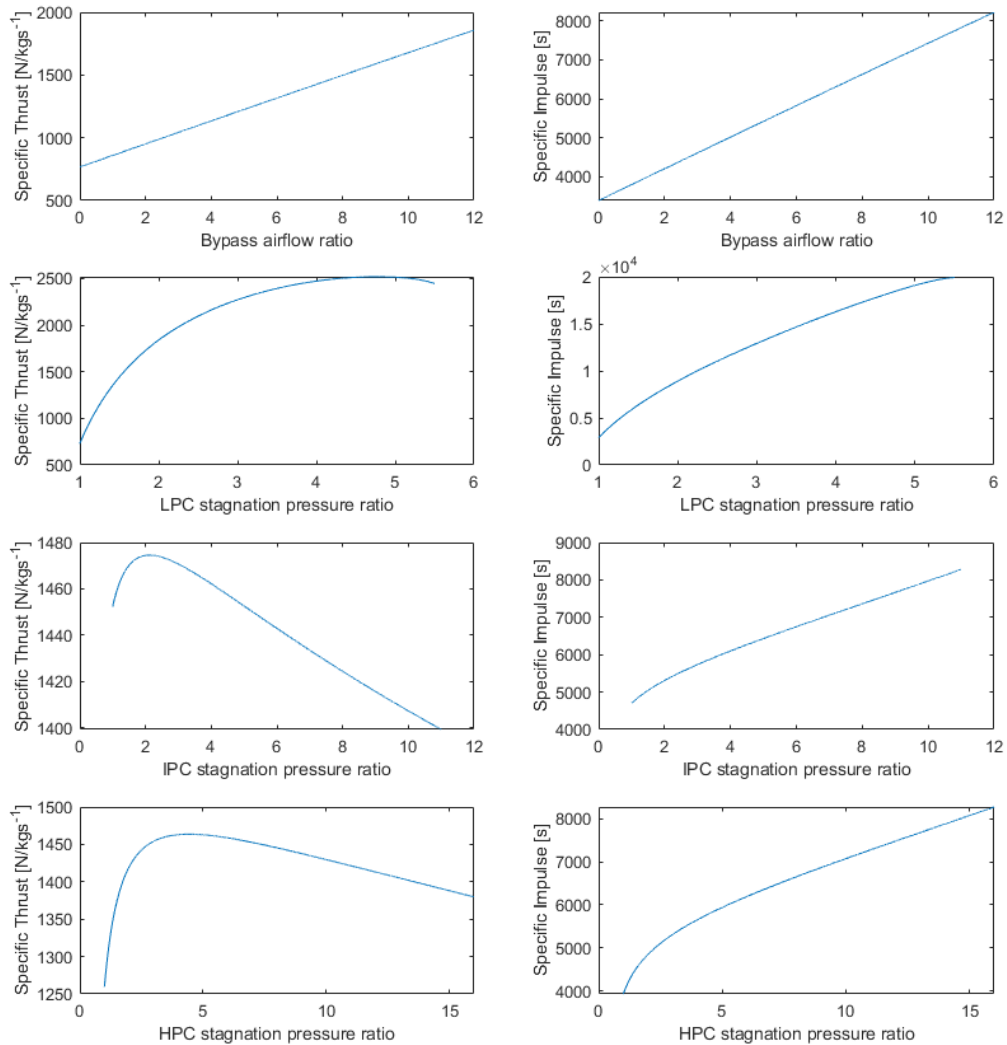


FIGURA 1: Empenyiment específic i impuls específic segons la variació d'un dels paràmetres.

En un principi es va estudiar el comportament de F/\dot{m} i I_{sp} per a variacions petites d'un dels quatre paràmetres, per als quatre casos. El resultat era una variació lineal de F/\dot{m} i I_{sp} . No obstant, agafant intervals més ampliats dels paràmetres α , π_{LPC} , π_{IPC} i π_{HPC} ,

s'observen variacions diferents. En la Fig. 1 es pot veure que les úniques relacions lineals són $\frac{F}{\dot{m}}(\alpha)$ i $I_{sp}(\alpha)$: com més gran sigui el flux màssic pel *bypass*, més gran seran el impuls específic i el empenyiment específic. Resulta bastant interessant veure que amb els ratis de pressió d'estancament del compressor F/\dot{m} i I_{sp} es maximitzen en una determinada configuració. Aquests màxims de les corbes es desplaçaran en funció de la configuració utilitzada, i aquest anàlisi correspon al apartat 3.

3 New set of parameters α , π_{LPC} , π_{IPC} and π_{HPC}

According to the results of question 2, select a new set of values for α , π_{LPC} , π_{IPC} and π_{HPC} , and compute the variation of F/\dot{m} and I_{sp} .

Per trobar una nova configuració òptima s'han seguit varis procediments. En primer lloc, s'han anat provant valors i s'ha notat que variar α influeix molt en π_{LPC} , i viceversa. Per tant, s'ha optat per estudiar la variació de F/\dot{m} i I_{sp} en funció de π_{LPC} per a diferents valors de α , amb π_{IPC} i π_{HPC} fixats. En les Fig. 2 i 3 es mostra $\frac{F}{\dot{m}}(\pi_{LPC})$ i $I_{sp}(\pi_{LPC})$, respectivament, i els diferents colors de les corbes s'assignen a diferents valors d' α .

Destacar que els punts on es trenca la continuïtat de la corba (i aquesta passa a ser un recta) es corresponen a valors en que la resolució analítica del apartat 1 deixa de tindre sentit físic i el resultat és un valor complex (amb part imaginària). Això passa perquè hi ha situacions que no es podrien donar, per exemple, que π_{LPC} sigui més gran que π_{IPC} .

Aquest mateix procediment es repeteix per a diferents combinacions de π_{IPC} i π_{HPC} , tal com s'indica en els títols de cada subplot de les Fig. 2 i 3.

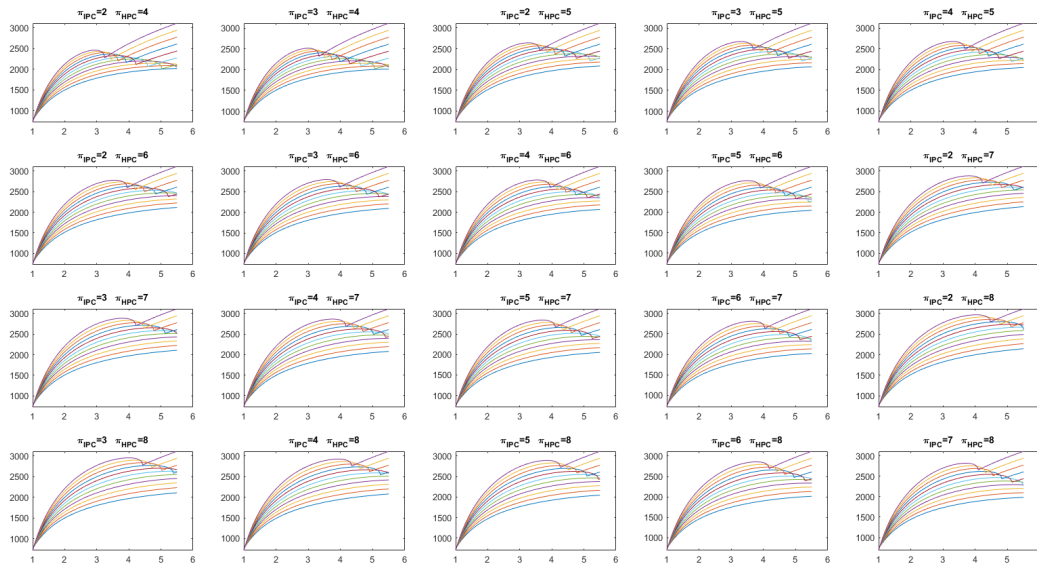


FIGURA 2: Empenyiment específic i impuls específic segons la variació d'un dels paràmetres.

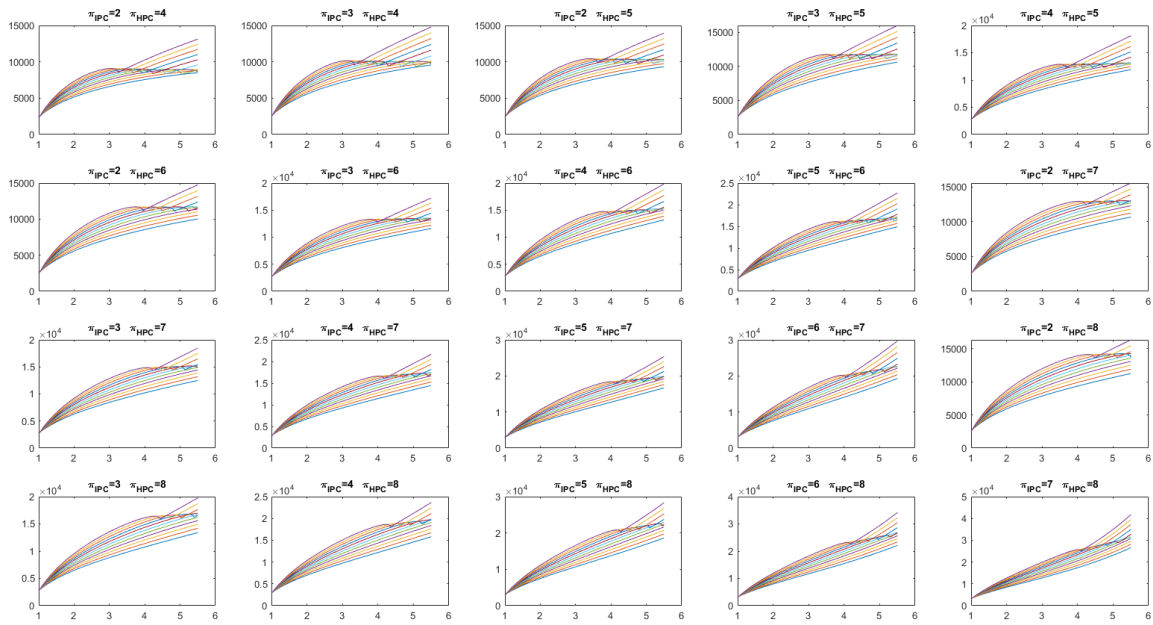


FIGURA 3: Empenyment específic i impuls específic segons la variació d'un dels paràmetres.

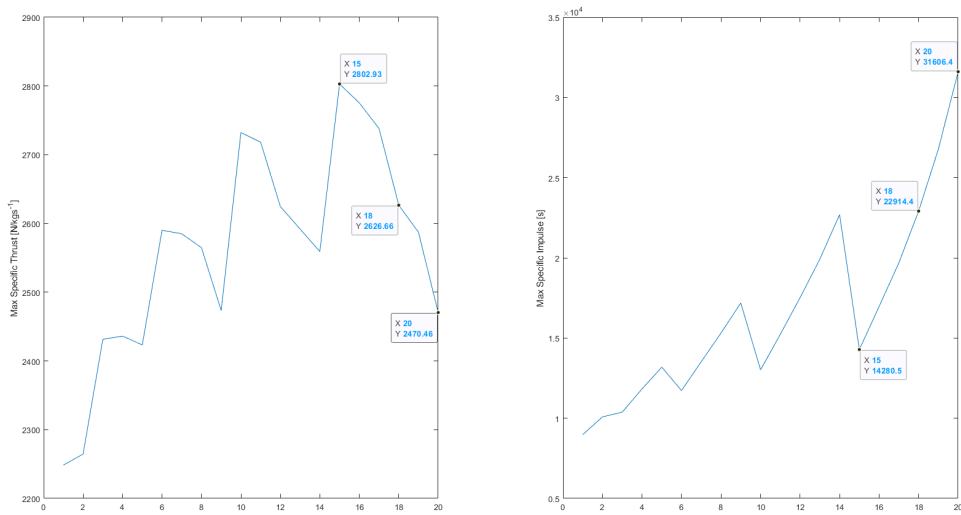


FIGURA 4: Empenyment específic i impuls específic segons la variació d'un dels paràmetres.

Per últim, s'han adquirit els valors màxims de cada subplot i s'ha guardat els corresponents paràmtres d' α i π_{LPC} . La Fig. 4 expressa aquests màxims en una gràfica on cada nombre natural del eix de les abscisses és una de les combinacions de π_{IPC} - π_{HPC} que apareixen en les Fig. 2 i 3. Els tres punts marcats són aquelles configuracions dels quatre paràmetres que donen com a resultat:

- El màxim valor de F/\dot{m} d'entre totes les configuracions.
- El màxim valor de I_{sp} d'entre totes les configuracions.
- Un dels valors màxims de F/\dot{m} i de I_{sp} d'entre totes les configuracions. Aquesta és la opció definitiva, la qual es correspon a $F/\dot{m} = 2626.66 \frac{N}{kg/s}$ i $I_{sp} = 22914.4s$ amb:

α	π_{LPC}	π_{IPC}	π_{HPC}
8	4.69	5	8

TAULA 2: Configuració inicial dels paràmetres.

4 Thermal, propulsive and overall efficiencies

If all the parameters are kept constant, except for the fan pressure ratio π_{LPC} , that is free to vary in a certain range, compute the thermal, propulsive and overall efficiencies against π_{LPC} .

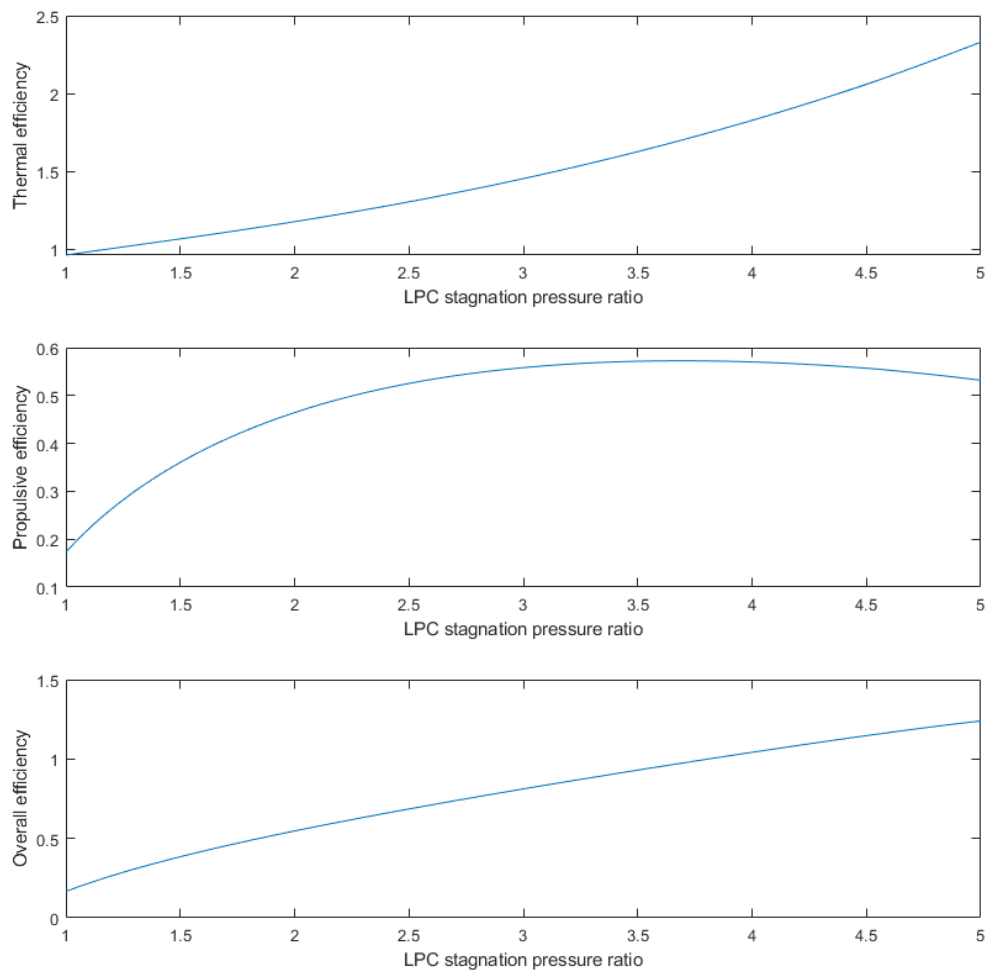


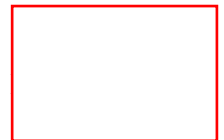
FIGURA 5: Eficiències en funció de π_{LPC} .

An analytical approach of a Three-Spoiled Turbofan PROPULSION


GRETA Q6 Grup 6 ESEIAAT

MM, ALL i JC

April 23, 2021



Contents

1	Introduction	2
2	Objectives	2
3	Three-spool turbfans	3
4	Nominal parameters' settlement	6
5	Study of the sensibility of the specific thrust and impulse	7
6	Resettlement of parameters	9
7	Thermal, propulsive and overall efficiencies	10
8	Conclusions	12
A	Infographic document of the Rolls-Royce's three-shaft turbfan Trent XWB	13
B	Code	13
B.1	Calculation of the specific thrust and impulse	13
B.2	Sensitivity of F/\dot{m} and I_{sp} to small variations of α	15
B.3	Sensitivity of F/\dot{m} and I_{sp} to small variations of π_{HPC}	17
B.4	Sensitivity of F/\dot{m} and I_{sp} to small variations of π_{IPC}	19
B.5	Sensitivity of F/\dot{m} and I_{sp} to small variations of π_{LPC} and efficiency variations	21



1 Introduction

Inicial considerations:

- The Low-Pressure Compressor, known as fan, is located between the stations 2-2.1 and driven by the Low-Pressure Turbine between 4.5-5 stations.
- Enclosed by phases 2.1-2.5 ther is the Intermediate-Pressure Compressor impulsed by the Intermediate-Pressure Turbine placed on 4.1-4.5.
- High-Pressure Compressor appears to be between 2.5-3, while the High-Pressure Turbine is stationed on 4-4.1.

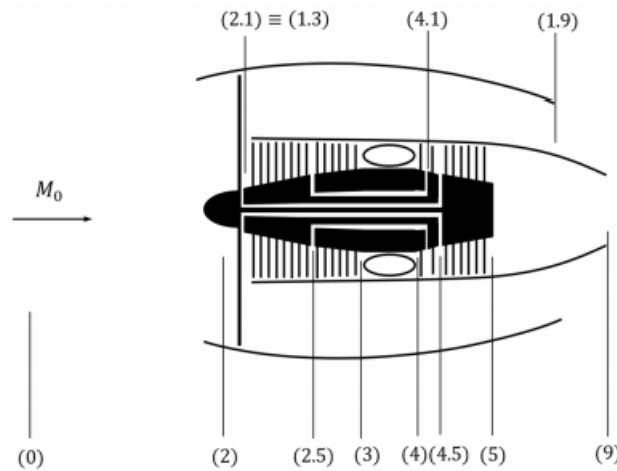


Figure 1: sketch of a three-spooled turbofan engine with convergent nozzles.

Further considerations are the flight altitude of 11000 m ISA, a velocity of $M_0 = 0.85$, the inlet turbine stagnation temperature $T_{t4} = 1450$ K and the following engine efficiencies:

π_d	η_{LPC}	η_{IPC}	η_{HPC}	π_b	η_b	η_{HPT}	η_{IPT}	η_{LPT}	η_{mH}	η_{mI}	η_{mL}	π_{np}	π_{ns}
0.98	0.89	0.88	0.89	0.96	0.99	0.91	0.91	0.93	0.993	0.995	0.997	0.99	0.99

Table 1: Turbofan efficiencies and compression rates.

Additional assumptions: $\gamma_c = 1.4$, $\gamma_t = 1.3$, $R_g = 287 \frac{J}{kgK}$ and $h = 43 \frac{MJ}{kg}$

2 Objectives

The main objectives of this assignment are stated as follow:

- To study a three-spooled turbofan engine with convergent nozzles, analyzing its cycle and determining its equations.
- To find a set of operational engine parameters with reasonably good performance.
- To identify how small perturbations of those operational parameters can affect the overall performance of the engine.



3 Three-spooled turbofans

In this section we are going to deduce the equations that define the performance of a three-spooled turbofan based on a two-spooled model.

To do so, we must consider (as shown in figure 1) three different stations in both the compressor and the turbine, which we will refer as low pressure section (*LP*), intermediate pressure section (*IP*) and high pressure section (*HP*). Each section is driven by a different spool and each spool has its own mechanical efficiency (η_m). As mentioned in the introduction, each turbine powers its compressor.

With that being said, we will define all the equations from point zero (inlet of the turbofan) to point nine

0. Free stream conditions

$$\theta_0 = \frac{T_{t0}}{T_0} = 1 + \frac{\gamma_c - 1}{2} M_0^2 \quad (1)$$

$$\delta_0 = \frac{P_{t0}}{P_0} = \left(1 + \frac{\gamma_c - 1}{2} M_0^2\right)^{\frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1}} \quad (2)$$

1. Inlet

$$\begin{aligned} T_{t0} &= T_{t2} \\ \pi_d &= \frac{P_{t2}}{P_{t0}} \end{aligned} \quad (3)$$

2. Compressor

(a) Low pressure compressor (LPC) 2-2.1

$$\pi_{LPC} = \pi_f = \frac{P_{t21}}{P_{t2}} = \frac{P_{t13}}{P_{t2}} \rightarrow P_{t21} = P_{t13} = \delta_0 \pi_d \pi_{LPC} P_0 \quad (4)$$

$$\eta_{LPC} = \frac{(\pi_{LPC})^{\frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c}} - 1}{\tau_{LPC} - 1} \quad (5)$$

$$\tau_{LPC} = \tau_f = \frac{T_{t21}}{T_{t2}} \rightarrow T_{t21} = T_{t13} = \theta_0 \tau_{LPC} T_0 \quad (6)$$

$$\dot{W}_{LPC} = \dot{m}(1 + \alpha) C_{pc}(T_{t21} - T_{t2}) = \dot{m}(1 + \alpha) C_{pc} T_{t2} (\tau_{LPC} - 1) \quad (7)$$

(b) Intermediate pressure compressor (IPC) 2.1-2.5

$$\pi_{IPC} = \frac{P_{t25}}{P_{t21}} \rightarrow P_{t25} = \delta_0 \pi_d \pi_{LPC} \pi_{IPC} P_0 \quad (8)$$

$$\eta_{IPC} = \frac{(\pi_{IPC})^{\frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c}} - 1}{\tau_{IPC} - 1} \quad (9)$$

$$\tau_{IPC} = \frac{T_{t25}}{T_{t21}} \rightarrow T_{t25} = \theta_0 \tau_{LPC} \tau_{IPC} T_0 \quad (10)$$

$$\dot{W}_{IPC} = \dot{m} C_{pc} (T_{t25} - T_{t21}) = \dot{m} C_{pc} T_{t2} \tau_{LPC} (\tau_{IPC} - 1) \quad (11)$$

(c) High pressure compressor (HPC) 2.5-3

$$\pi_{HPC} = \frac{P_{t3}}{P_{t25}} \rightarrow P_{t3} = \delta_0 \pi_d \pi_{LPC} \pi_{IPC} \pi_{HPC} P_0 \quad (12)$$

$$\eta_{HPC} = \frac{(\pi_{HPC})^{\frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c}} - 1}{\tau_{HPC} - 1} \quad (13)$$

$$\tau_{HPC} = \frac{T_{t3}}{T_{t25}} \rightarrow T_{t3} = \theta_0 \tau_{LPC} \tau_{IPC} \tau_{HPC} T_0 \quad (14)$$

$$\dot{W}_{HPC} = \dot{m} C_{pc} (T_{t3} - T_{t25}) = \dot{m} C_{pc} T_{t2} \tau_{LPC} \tau_{IPC} (\tau_{HPC} - 1) \quad (15)$$



3. Combustion chamber

$$\pi_b = \frac{P_{t4}}{P_{t3}} \rightarrow P_{t4} = \delta_0 \pi_d \pi_{LPC} \pi_{IPC} \pi_{HPC} \pi_b P_0 \quad (16)$$

$$\theta_t = \frac{T_{t4}}{T_0} \quad (17)$$

$$\eta_b = \frac{(\dot{m} + \dot{m}_f) C_{pt} T_{t4} - \dot{m} C_{pc} T_{t3}}{\dot{m}_f h} \quad (18)$$

$$f = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_f} = \frac{C_{pt} T_{t4} - C_{pc} T_{t3}}{\eta_b h - C_{pt} T_{t4}} \quad (19)$$

4. Turbine

In the turbine both the stagnation temperature and pressure upstream are higher than the ones downstream, which translates in a negative work. In addition, it has to be reminded that we now found ourselves in the hot zone, so the adiabatic index will be γ_t .

To find the expressions of τ we will use the upcoming equation

$$\dot{W}_{comp} + \dot{W}_{aux} = \eta_m |\dot{W}_{turb}| \quad (20)$$

In which \dot{W}_{aux} is the power of other systems and can be neglected, and η_m is the mechanical efficiency of the spool.

(a) High pression turbine (HPT) 4-4.1

$$\dot{W}_{HPT} = \dot{m}(1+f)C_{pt}(T_{t4} - T_{t41}) = \dot{m}(1+f)C_{pt}T_{t4}(1 - \tau_{HPT}) \quad (21)$$

Merging equations 15 and 21 into 20 we can obtain the expression for τ_{HPT}

$$\tau_{HPT} = 1 - \frac{1}{\eta_{mH}} \frac{1}{(1+f)} \frac{C_{pc} T_{t2}}{C_{pt} T_{t4}} \tau_{LPC} \tau_{IPC} (\tau_{HPC} - 1) \quad (22)$$

$$\eta_{HPT} = \frac{(\pi_{HPT})^{\frac{\gamma_t-1}{\gamma_t}} - 1}{\tau_{HPT} - 1} \rightarrow \pi_{HPT} = \left(1 - \frac{1 - \tau_{HPT}}{\eta_{HPT}}\right)^{\frac{\gamma_t}{\gamma_t-1}} \quad (23)$$

$$\pi_{HPT} = \frac{P_{t41}}{P_{t4}} \rightarrow P_{t41} = \delta_0 \pi_d \pi_{LPC} \pi_{IPC} \pi_{HPC} \pi_b \pi_{HPT} P_0 \quad (24)$$

(b) Intermediate pression turbine (IPT) 4.1-4.5

$$\dot{W}_{IPT} = \dot{m}(1+f)C_{pt}(T_{t41} - T_{t45}) = \dot{m}(1+f)C_{pt}T_{t4}\tau_{HPT}(1 - \tau_{IPT}) \quad (25)$$

Repeating the process done in the high pressure turbine we can work with equations 11, 25 and 20 to obtain the following

$$\tau_{IPT} = 1 - \frac{1}{\eta_{mI}} \frac{1}{(1+f)} \frac{C_{pc} T_{t2}}{C_{pt} T_{t4}} \frac{\tau_{LPC}}{\tau_{HPT}} (\tau_{IPC} - 1) \quad (26)$$

$$\eta_{IPT} = \frac{(\pi_{IPT})^{\frac{\gamma_t-1}{\gamma_t}} - 1}{\tau_{IPT} - 1} \rightarrow \pi_{IPT} = \left(1 - \frac{1 - \tau_{IPT}}{\eta_{IPT}}\right)^{\frac{\gamma_t}{\gamma_t-1}} \quad (27)$$

$$\pi_{IPT} = \frac{P_{t45}}{P_{t41}} \rightarrow P_{t45} = \delta_0 \pi_d \pi_{LPC} \pi_{IPC} \pi_{HPC} \pi_b \pi_{HPT} \pi_{IPT} P_0 \quad (28)$$



(c) Low pressure turbine (LPC) 4.5-5

$$\dot{W}_{LPT} = \dot{m}(1+f)C_{pt}(T_{t45} - T_{t5}) = \dot{m}(1+f)C_{pt}T_{t4}\tau_{HPT}\tau_{IPT}(1 - \tau_{LPT}) \quad (29)$$

As done previously, merging equations 7 and 29 into 20 we get

$$\tau_{LPT} = 1 - \frac{1}{\eta_{mL}} \frac{(1+\alpha)C_{pc}T_{t2}}{(1+f)C_{pt}T_{t4}} \frac{1}{\tau_{HPT}\tau_{IPT}} (\tau_{LPC} - 1) \quad (30)$$

$$\eta_{LPT} = \frac{(\pi_{LPT})^{\frac{\gamma_t-1}{\gamma_t}} - 1}{\tau_{LPT} - 1} \rightarrow \pi_{LPT} = \left(1 - \frac{1 - \tau_{LPT}}{\eta_{LPT}}\right)^{\frac{\gamma_t}{\gamma_t-1}} \quad (31)$$

$$\pi_{LPT} = \frac{P_{t5}}{P_{t45}} \rightarrow P_{t5} = \delta_0 \pi_d \pi_{LPC} \pi_{IPC} \pi_{HPC} \pi_b \pi_{HPT} \pi_{IPT} \pi_{LPT} P_0 \quad (32)$$

9. Nozzle

As the turbofan has two different air flows it is necessary to distinguish between the primary's flow nozzle (9) and the secondary flow one (1.9), (see figure 1).

(a) Primary flow

$$T_{t5} = T_{t9} \quad (33)$$

$$\pi_{np} = \frac{P_{t9}}{P_{t5}} \rightarrow P_{t9} = \delta_0 \pi_d \pi_{LPC} \pi_{IPC} \pi_{HPC} \pi_b \pi_{HPT} \pi_{IPT} \pi_{LPT} \pi_{np} P_0 \quad (34)$$

$$M_9 = \sqrt{\frac{2}{\gamma_t - 1} \left[\left(\frac{P_{t9}}{P_0} \right)^{\frac{\gamma_t-1}{\gamma_t}} - 1 \right]} \quad (35)$$

Our first hypothesis is that the nozzle must be matched ($P_9 = P_0$), however if one gets $M_9 > 1$ that means that the nozzle is no longer matched but chocked, and, assuming $M_9 = 1$, the pressure at this point will be:

$$\frac{P_9}{P_0} = \frac{P_{t9}}{P_0} \left(\frac{2}{\gamma_t + 1} \right)^{\frac{\gamma_t}{\gamma_t-1}} \quad (36)$$

$$T_9 = \frac{T_{t9}}{1 + \frac{\gamma_t-1}{2} M_9^2} = \frac{T_{t4}\tau_{HPT}\tau_{IPT}\tau_{LPT}}{1 + \frac{\gamma_t-1}{2} M_9^2} \quad (37)$$

$$\frac{P_9 A_9}{\dot{m}} = \frac{(1+f)R_g T_9}{u_9} \quad (38)$$

(b) Secondary flow

$$T_{t13} = T_{t19} \quad (39)$$

$$\pi_{ns} = \frac{P_{t19}}{P_{t13}} \rightarrow P_{t19} = \delta_0 \pi_d \pi_{LPC} \pi_{ns} P_0 \quad (40)$$

$$M_{19} = \sqrt{\frac{2}{\gamma_c - 1} \left[\left(\frac{P_{t19}}{P_0} \right)^{\frac{\gamma_c-1}{\gamma_c}} - 1 \right]} \quad (41)$$

The same hypothesis is made for the secondary flow, considering $P_9 = P_0$ and expecting the Mach number being under the unit. If that is not the case, it is conclude that the nozzle is chocked assuming $M_{19} = 1$ another time and recalculating the exit pressure such:



$$\frac{P_{19}}{P_0} = \frac{P_{t19}}{P_0} \left(\frac{2}{\gamma_c + 1} \right)^{\frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1}} \quad (42)$$

$$\frac{T_{t19}}{T_{19}} = \frac{\gamma_c + 1}{2} \rightarrow T_{19} = \frac{2T_{t19}}{\gamma_c + 1} = \frac{2T_{t13}}{\gamma_c + 1} = \frac{2\theta_0\tau_{LPC}T_0}{\gamma_c + 1} \quad (43)$$

$$\frac{P_{19}A_{19}}{\dot{m}} = \frac{\alpha R_g T_{19}}{u_{19}} \quad (44)$$

10. Final computations

Once all procedural calculations are done, it is possible to obtain the specific thrust and the specific impulse as:

$$\frac{F}{\dot{m}} = (1 + f)u_9 - M_0a_0 + \frac{P_9A_9}{\dot{m}} \left(1 - \frac{P_0}{P_9} \right) + \alpha(u_{19} - M_0a_0) + \frac{P_{19}A_{19}}{\dot{m}} \left(1 - \frac{P_0}{P_{19}} \right) \quad (45)$$

In order to obtain the specific impulse the specific fuel consumption is required

$$cs = \frac{f}{\frac{F}{\dot{m}}} \quad (46)$$

Thus:

$$I_{sp} = \frac{1}{c_s g} \quad (47)$$

4 Nominal parameters' settlement

In order to find reasonable values for the following parameters: α , π_{LPC} , π_{IPC} and π_{HPC} it is a must, do some research on the aircraft industry. More precisely, the source of the information was the web page from the actual Rolls-Royce company, where a descriptive PDF document of the engine was found (see the document on the annex section A). That allowed a first approach over some reasonable values, such as a by pass ratio around 10 and an overall pressure ratio of 50.

Once a general idea over the approximated value that each parameter could take was conceived, it was about time to find those values that gave an acceptable specific thrust and specific impulse. It was known that a reasonable value of I_{sp} was around $6000 \frac{Kg}{Ns}$.

Working with the information already mentioned, it was found that a huge overall compression ratio led to imaginary numbers for the parameters needed. So it was necessary to make sure π_c was high enough to ensure $6000 \frac{Kg}{Ns}$, but not too much to induce illogical results in I_{sp} .

After some attempts a reasonable set of parameters was finally found:

$$\begin{cases} \alpha = 9.6 \\ \pi_{HPC} = 6.5 \\ \pi_{IPC} = 5 \\ \pi_{LPC} = 1.6 \end{cases}$$

Applying the process explained in the previous point, the specific thrust and impulse resulted:

$$\begin{aligned} \frac{F}{\dot{m}} &= 1.3931 \times 10^3 \text{ m/s} \\ I_{sp} &= 5.9231 \times 10^3 \text{ s} \end{aligned}$$

As it can be seen, both values are appropriated as a three spool turbofan specifications.



5 Study of the sensibility of the specific thrust and impulse

In this section we will discuss how does a small variation of this parameters in a range about its nominal value affect both the specific thrust and impulse, which play a very important role regarding the turbofan's efficiency.

If we take a look at figure 2, it can be noted that, if the bypass ratio is increased, the same happens with the specific thrust and impulse. Both seem to have the same parabolic relation with α , which reaches a maximum for a value of approximately 11.25. After that the curve starts dropping.

The fact that both share the same optimal bypass ratio means that for a design bypass ratio of 11.25 the turbofan will be providing maximum specific thrust at the same time as it will be operating at maximum specific impulse, which is really interesting.

This optimal α gives a maximum specific thrust of 1420m/s and a maximum specific impulse of about 6050s.

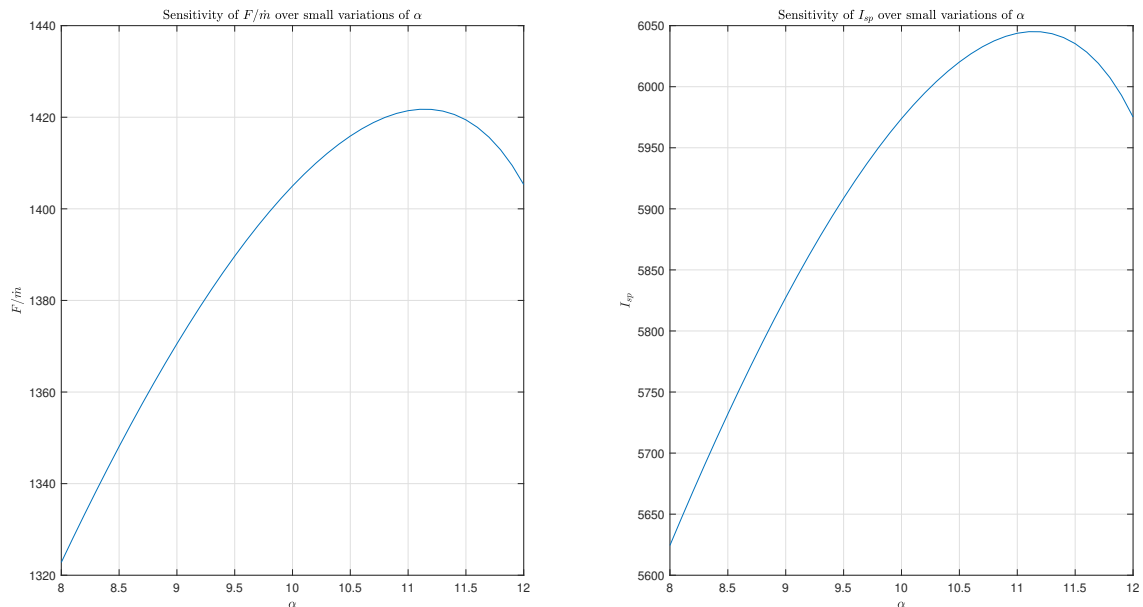


Figure 2: Sensibility of the specific thrust F/\dot{m} (right) and specific impulse I_{sp} (left), to small variations of the angle of attack α .

Regarding figure 3, at first sight it seems like the specific thrust decreases linearly with π_{HPC} , whereas for the specific impulse, the relation is not as linear although it could be considered as so, and, contrary to the specific thrust, the proportion is direct. In reality, relations are always parabolic and we find ourselves in the seemingly linear section of those curves.

Considering a linear approximation, it is acceptable to say that for each unit that π_{HPC} increases, F/\dot{m} decreases by 35m/s and I_{sp} increases by 95s. To be noted that those values are just qualitative approaches.

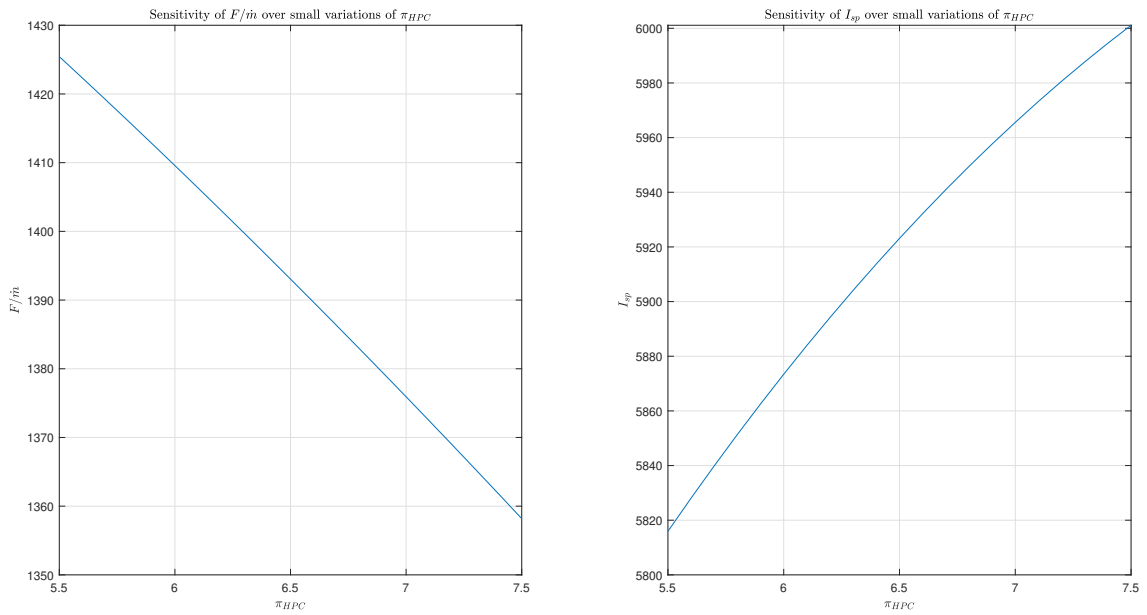


Figure 3: Sensibility of the specific thrust F/\dot{m} (right) and specific impulse I_{sp} (left), to small variations of the stagnation pressure ratio in the high pressure compressor π_{HPC} .

For small variations of π_{IPC} it can be extracted from figure 4 that the relations are equivalent with the ones in figure 3, but the only thing that really varies is the range of values in which F/\dot{m} and I_{sp} are modified (the increase per unit has widen a little). If π_{IPC} increases by a unit, the increase of F/\dot{m} is 38m/s and for I_{sp} it is 115s. One more time, it must be noted that those values are just qualitative approaches.

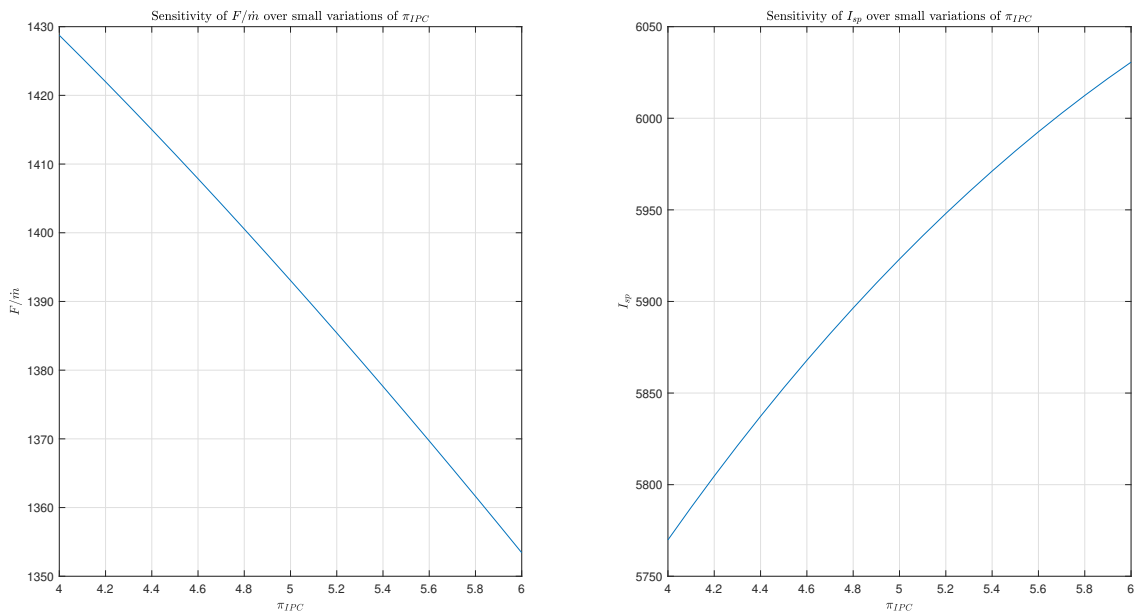


Figure 4: Sensibility of the specific thrust F/\dot{m} (right) and specific impulse I_{sp} (left), to small variations of the stagnation pressure ratio in the intermediate pressure compressor π_{IPC} .

Finally, figure 5 shows a similar situation to figure 2, although in this case the parabola of F/\dot{m} is a little displaced to the left in comparison with the other parabola. The reason why the relation has



a parabolic form instead of the linear one obtained with π_{HPC} and π_{IPC} , can be explained taking a look at equations 45 and 47, where it can be seen that the specific thrust depend on the static pressure in points 9 and 19 as long as the nozzle is not matched. The low pressure compressor is the only one of the three of them responsible of the compression of both the primary and secondary flow, so the greater its stagnation pressure ratio, the greater will P_9 and P_{19} be, and thus the specific impulse will raise too.

The optimal π_{LPC} is between 1.6 and 1.7 for both specific thrust and impulse. Those optimal values give a maximum specific thrust of approximately 1400 and a maximum specific impulse of about 6000s. They are smaller than the ones obtained with the optimal bypass ratio but not by much.

Again it is extremely interesting to work with this optimal value of π_{LPC} in order to operate with the best efficiency.

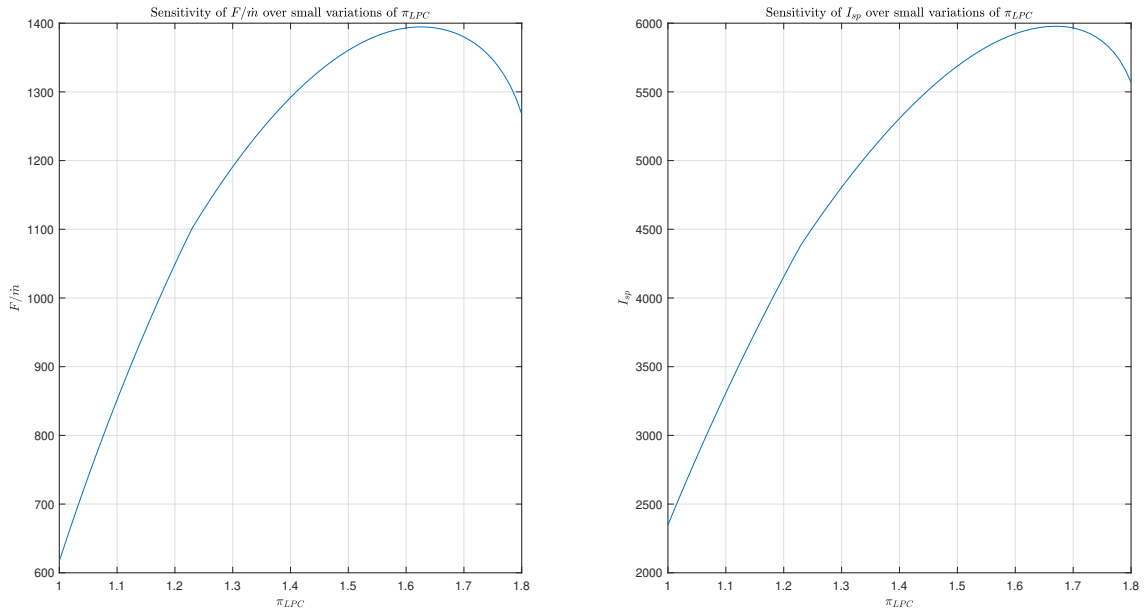


Figure 5: Sensibility of the specific thrust F/\dot{m} (right) and specific impulse I_{sp} (left), to small variations of the stagnation pressure ratio in the low pressure compressor π_{LPC} .

6 Resettlement of parameters

Once the corresponding analysis of the settlement parameters is done, the final design parameters can be decided and are shown as follows.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 9.4 \\ \pi_{HPC} = 6.8 \\ \pi_{IPC} = 5.6 \\ \pi_{LPC} = 1.6 \end{array} \right.$$

It was found that, in order to consistently increase the specific impulse, the overall pressure ratio had to be raised, resulting in a compulsory decrease in the specific thrust. To be taken into consideration that an increase in the I_{sp} it is always welcome, even though the $\frac{F}{\dot{m}}$ has been diminished.

So as to achieve an increase on each pressure ratio, the bypass ratio must reduce its value.

In this case, as it can be seen, that the overall pressure ratio took a value around 61, since the bypass ratio descended 0.2 units.

Thus:



$$\frac{F}{\dot{m}} = 1.3521 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$I_{sp} = 5.9902 \times 10^3 \text{ s}$$

Even though the values have been slightly modified, it has to be taken into account that for those values we get an overall stagnation pressure ratio (π_c) of 60, which is extremely hard to achieve but not impossible, as the General Electric GE9X can operate with an overall pressure ratio from 40 to 60.

7 Thermal, propulsive and overall efficiencies

The turbofan's thermal efficiency is defined as the ratio between the gain of kinetic energy per unit time¹ of the working fluid —i.e. the kinetic energy (per unit time) of the secondary and primary gases leaving their respective nozzles, minus the inlet air's kinetic energy (per unit time)— and the thermal power produced within the combustion chamber (see equation 48).

$$\eta_{th} = \frac{\frac{1}{2}(\dot{m} + \dot{m}_f) u_{9'}^2 + \alpha \frac{1}{2} \dot{m} u_{19'}^2 - \frac{1}{2} \dot{m} (1 + \alpha) u_0^2}{\dot{m}_f h} \quad (48)$$

Even though the thermal efficiency is a good measure of the engine's performance, showing how much thermal power is converted into kinetic energy and available for the turbofan to produce the thrust necessary to propel the vehicle, there is the need to know how much of this kinetic energy is eventually destined to produce the required thrust. The ratio between the useful power —i.e. the product of the thrust generated and the flight velocity— and the kinetic energy gain per unit time is what measures that, and is called the propulsive efficiency (see equation 49).

$$\eta_p = \frac{F u_0}{\frac{1}{2}(\dot{m} + \dot{m}_f) u_{9'}^2 + \alpha \frac{1}{2} \dot{m} u_{19'}^2 - \frac{1}{2} \dot{m} (1 + \alpha) u_0^2} \quad (49)$$

All in all, what really matters is the overall efficiency, which is the amount of thermal power actually used to propel the vehicle and is calculated multiplying both, the thermal and the propulsive efficiency (see equation 50).

$$\eta_o = \frac{F u_0}{\dot{m}_f h} = \eta_{th} \eta_p \quad (50)$$

The figure below (fig.6) shows the evolution of the three main turbofan efficiencies against small variations from the nominal value of the LPC's (fan) compression ratio².

¹The gain of kinetic energy per unit time is calculated assuming full expansion to ambient pressure p_0 , which is produced at exit velocities $u_{9'}$ and $u_{19'}$, for the primary and secondary flows respectively.

²It is assumed that the rest of the parameters (α , π_{IPC} and π_{HPC}) are kept constant.

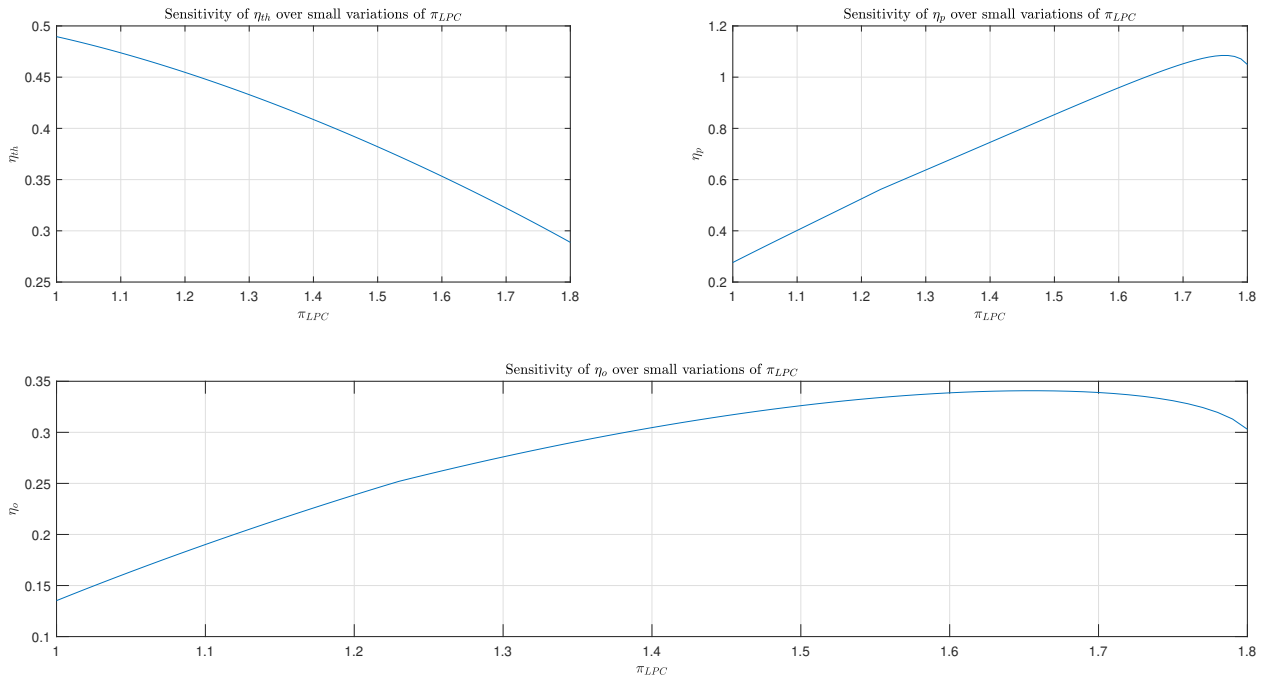


Figure 6: Caption

It can be seen from figure 6 that an increase in π_{LPC} generates an increase in the propulsive efficiency but a decrease in the thermal efficiency. Notice that the propulsive efficiency's tangent slope, i.e. its derivative, is greater in absolute value than the thermal one, therefore the overall efficiency also increases with a raise in π_{LPC} .

The reason why there is a decrease in the thermal efficiency as the fan's compression ratio becomes greater is because the terms f and u_{9r} decrease. Nevertheless, u_{19r} increases, but significantly less in magnitude than the decrease of the last two terms mentioned. Thus, following the equation 48, if α , h and u_0 remain constant, the thermal efficiency decreases.

As seen by now, the increase in π_{LPC} implies a decrease in thermal efficiency and, therefore, a decrease in kinetic energy gain per unit time. This term is in the denominator of the propulsive efficiency, but it is not the only feature that makes η_p increase, since the thrust also increases with π_{LPC} (as seen in figure 5).

The raise in the overall efficiency is also explained by taking a look at the equation 50, where f decreases (slightly) and F increases with π_{LPC} .

Figure 6, more precisely the propulsive efficiency graph, presents a non-obvious feature. For values of π_{LPC} greater than 1.64, the efficiency becomes greater than 1. This means that more power than the available from the kinetic energy gain per unit time is converted into propulsive power, which is physically impossible (but not mathematically). It happens because those values of π_{LPC} , while physically not possible, imply that the fan (or low power compressor) exercises, mathematically, more work and power than what it can actually perform and, thus, the efficiency is increased over one.



8 Conclusions

Since the amount of flow that passes through the bypass section is mainly influenced by the regime of operation of the LPC (fan), it is a clear advantage to operate with a three-spool turbofan rather than with a double-spool turbofan, because the first permits the fan to rotate in a different regime, i.e. at different rpm, than the IPC and it can increase or decrease α without disturbing the primary flow regime. It is also worth to decouple the first two compressors because it allows the engine to remove the gearbox that is used in double-spool designs to decouple the LPC from the IPC.

It has been seen as well, that the nominal parameters chosen, while performing satisfactorily in terms of specific thrust and impulse, their performance is satisfactory as well in terms of efficiency. Moreover, the new set of parameters from section 6 are slightly more efficient than the nominal (see the efficiencies below), becoming a theoretically ideal set of performance parameters for a three-spool turbofan design.

$$\begin{aligned}
 \text{Initial efficiencies} & \begin{cases} \eta_{th} = 0.3533 \\ \eta_p = 0.9478 \\ \eta_o = 0.3349 \end{cases} \\
 \text{Final efficiencies} & \begin{cases} \eta_{th} = 0.3533 \\ \eta_p = 0.9588 \\ \eta_o = 0.3387 \end{cases}
 \end{aligned}$$

As it has been previously mentioned, an overall stagnation pressure ratio over 50 starts being physically challenging to achieve. That being said, this is nothing else than a theoretical project, allowing us to dismiss such obstacles in order to evaluate the parameters as wished, thus we consider the results obtained as satisfactory.

Taking this into account, it is reasonable to conclude that the initial set of parameters were fairly acceptable, giving suitable results. We believe that this fact is a consequence of a preliminary study deeply conducted.



Annex

A Infographic document of the Rolls-Royce's three-shaft turbofan Trent XWB

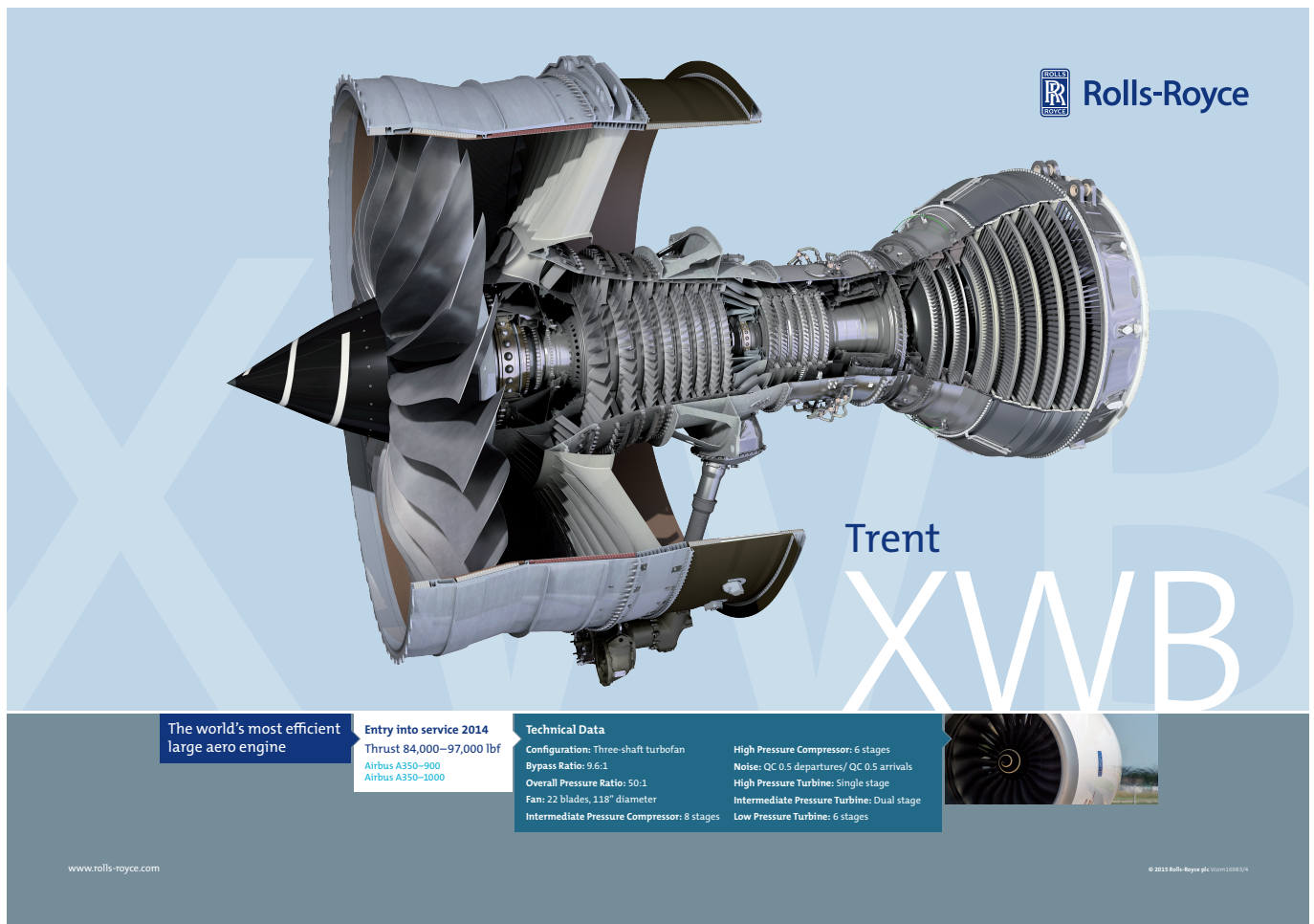


Figure 7: Data sheet of the Rolls Royce's Trent XWB, available at: <https://www.rolls-royce.com/products-and-services/civil-aerospace/airlines/trent-xwb.aspx#/>.

B Code

B.1 Calculation of the specific thrust and impulse

```
1 clear all; clc;
2
3 % 1. INPUT DATA
4 % Physical data
5 gamma_c=1.4;
6 gamma_t=1.3;
7 h=43e6;
8 Rg=287;
9 g = 9.81;
10 Cp_c=gamma_c/(gamma_c-1)*Rg;
```



```

11 Cpt=gamma_t/(gamma_t-1)*Rg;
12 % Operational data
13 M0=0.84;
14 H=11e3;
15 Tt4=1450; % K
16 nd=0.98;
17 eLPC=0.89;
18 eIPC=0.98;
19 eHPC=0.89;
20 nb=0.96;
21 eb=0.99;
22 eHPT=0.91;
23 eIPT=0.91;
24 eLPT=0.93;
25 emH=0.993;
26 emI=0.995;
27 emL=0.997;
28 nnp=0.99;
29 nns=0.99;
30 % Parameters to analyze
31 alpha=9.6;
32 nLPC=1.6;
33 nIPC=5;
34 nHPC=6.5;
35
36 % -----TURBOFAN STUDY-----
37
38 % Static pressure and temperature
39 T0=288.15-0.0065*H;
40 P0=101325*(T0/288.15)^5.256;
41
42 % 0. Free stream conditions
43 d0=(1+(gamma_c-1)/2*M0^2)^(gamma_c/(gamma_c-1));
44 theta0=1+(gamma_c-1)/2*M0^2;
45 a0 = sqrt(gamma_c*Rg*T0);
46
47 % Inlet=not relevant
48 % 2. Compressor
49 tLPC=1+(nLPC^((gamma_c-1)/gamma_c)-1)/eLPC;
50 tIPC=1+(nIPC^((gamma_c-1)/gamma_c)-1)/eIPC;
51 tHPC=1+(nHPC^((gamma_c-1)/gamma_c)-1)/eHPC;
52 % 3. Combustion chamber
53 theta_t=Tt4/T0;
54 f=(Cpt*Tt4-Cpc*theta0*tLPC*tHPC*tIPC*T0)/(eb*h-Cpt*Tt4);
55 % 4. Turbine
56 tHPT=1-(Cpc*theta0*T0*tLPC*tIPC*(tHPC-1))/(emH*(1+f)*Cpt*Tt4);
57 tIPT=1-(Cpc*theta0*T0*tLPC*(tIPC-1))/(emI*(1+f)*Cpt*Tt4*tHPT);
58 tLPT=1-(Cpc*theta0*T0*(1+alpha)*(tLPC-1))/(emL*(1+f)*Cpt*Tt4*tHPT*tIPT);
59 nHPT = (1-(1-tHPT)/(eHPT))^((gamma_t)/(gamma_t-1));
60 nIPT = (1-(1-tIPT)/(eIPT))^((gamma_t)/(gamma_t-1));
61 nLPT = (1-(1-tLPT)/(eLPT))^((gamma_t)/(gamma_t-1));
62 % 9. Nozzle
63 % Primary flow
64 Pt9_P0 = d0*nb*nLPC*nIPC*nHPC*nd*nHPT*nIPT*nLPT*nnp;
65 M9 = sqrt(2/(gamma_t-1)*(Pt9_P0^((gamma_t-1)/(gamma_t))-1));
66 if M9 > 1
67     P9_P0 = Pt9_P0*(2/(gamma_t+1))^((gamma_t)/(gamma_t-1));
68     M9 = 1;
69 elseif M9 <= 1
70     P9_P0 = 1;
71 end
72 T9 = (Tt4*tHPT*tIPT*tLPT)/(1+(gamma_t-1)/2*M9^2);
73 u9 = M9*sqrt(gamma_t*Rg*T9);
74 A9P9_mp = ((1+f)*Rg*T9)/u9;
75 % Secondary flow

```



```

76 Pt19_P0 = d0*nd*nLPC*nns;
77 M19 = sqrt(2/(gamma_c-1)*(Pt19_P0^((gamma_c-1)/(gamma_c))-1));
78 if M19 > 1
79     P19_P0 = Pt19_P0*(2/(gamma_c+1))^((gamma_c)/(gamma_c-1));
80     M19 = 1;
81 elseif M19 <= 1
82     P19_P0 = 1;
83 end
84 T19 = (2*theta0*tLPC*T0)/(gamma_c+1);
85 u19 = M19*sqrt(gamma_c*Rg*T19);
86 A19P19_mp = (alpha*Rg*T19)/u19;
87
88 % Final Calculations
89 F_mp = (1+f)*u9-M0*a0+A9P9_mp*(1-1/P9_P0)+alpha*(u19-M0*a0)+A19P19_mp*(1-1/P19_P0);
90 Cs = f/F_mp;
91 I_sp = 1/(Cs*g);

```

Listing 1: Code used to obtain the value of the specific thrust and impulse for the first set of parameters.

B.2 Sensitivity of F/\dot{m} and I_{sp} to small variations of α

```

1 clear all; clc;
2
3 % 1. INPUT DATA
4 % Physical data
5 gamma_c=1.4;
6 gamma_t=1.3;
7 h=43e6;
8 Rg=287;
9 g = 9.81;
10 Cpc=gamma_c/(gamma_c-1)*Rg;
11 Cpt=gamma_t/(gamma_t-1)*Rg;
12 % Operational data
13 M0=0.84;
14 H=11e3;
15 Tt4=1450; % K
16 nd=0.98;
17 eLPC=0.89;
18 eIPC=0.98;
19 eHPC=0.89;
20 nb=0.96;
21 eb=0.99;
22 eHPT=0.91;
23 eIPT=0.91;
24 eLPT=0.93;
25 emH=0.993;
26 emI=0.995;
27 emL=0.997;
28 nnp=0.99;
29 nns=0.99;
30 % Parameters to analyze
31 nLPC=1.6;
32 nIPC=5;
33 nHPC=6.5;
34
35 F_mp = zeros(21,1);
36 I_sp = zeros(21,1);
37 k = 1;
38 for alpha = 8:0.1:12
39
40     % -----TURBOFAN STUDY-----

```




```

41
42 % Static pressure and temperature
43 T0=288.15-0.0065*H;
44 P0=101325*(T0/288.15)^5.256;
45
46 % 0. Free stream conditions
47 d0=(1+(gamma_c-1)/2*M0^2)^(gamma_c/(gamma_c-1));
48 theta0=1+(gamma_c-1)/2*M0^2;
49 a0 = sqrt(gamma_c*Rg*T0);
50
51 % Inlet=not relevant
52 % 2. Compressor
53 tLPC=1+(nLPC^((gamma_c-1)/gamma_c)-1)/eLPC;
54 tIPC=1+(nIPC^((gamma_c-1)/gamma_c)-1)/eIPC;
55 tHPC=1+(nHPC^((gamma_c-1)/gamma_c)-1)/eHPC;
56 % 3. Combustion chamber
57 theta_t=Tt4/T0;
58 f=(Cpt*Tt4-Cpc*theta0*tLPC*tHPC*tIPC*T0)/(eb*h-Cpt*Tt4);
59 % 4. Turbine
60 tHPT=1-(Cpc*theta0*T0*tLPC*tIPC*(tHPC-1))/(emH*(1+f)*Cpt*Tt4);
61 tIPT=1-(Cpc*theta0*T0*tLPC*(tIPC-1))/(emI*(1+f)*Cpt*Tt4*tHPT);
62 tLPT=1-(Cpc*theta0*T0*(1+alpha)*(tLPC-1))/(emL*(1+f)*Cpt*Tt4*tHPT*tIPT);
63 nHPT = (1-(1-tHPT)/(eHPT))^(gamma_t/(gamma_t-1));
64 nIPT = (1-(1-tIPT)/(eIPT))^(gamma_t/(gamma_t-1));
65 nLPT = (1-(1-tLPT)/(eLPT))^(gamma_t/(gamma_t-1));
66 % 9. Nozzle
67 % Primary flow
68 Pt9_P0 = d0*nb*nLPC*nIPC*nHPC*nd*nHPT*nIPT*nLPT*nnp;
69 M9 = sqrt(2/(gamma_t-1)*(Pt9_P0^((gamma_t-1)/(gamma_t))-1));
70 if M9 > 1
71     P9_P0 = Pt9_P0*(2/(gamma_t+1))^(gamma_t/(gamma_t-1));
72     M9 = 1;
73 elseif M9 <= 1
74     P9_P0 = 1;
75 end
76 T9 = (Tt4*tHPT*tIPT*tLPT)/(1+(gamma_t-1)/2*M9^2);
77 u9 = M9*sqrt(gamma_t*Rg*T9);
78 A9P9_mp = ((1+f)*Rg*T9)/u9;
79 % Secondary flow
80 Pt19_P0 = d0*nd*nLPC*nns;
81 M19 = sqrt(2/(gamma_c-1)*(Pt19_P0^((gamma_c-1)/(gamma_c))-1));
82 if M19 > 1
83     P19_P0 = Pt19_P0*(2/(gamma_c+1))^(gamma_c/(gamma_c-1));
84     M19 = 1;
85 elseif M19 <= 1
86     P19_P0 = 1;
87 end
88 T19 = (2*theta0*tLPC*T0)/(gamma_c+1);
89 u19 = M19*sqrt(gamma_c*Rg*T19);
90 A19P19_mp = (alpha*Rg*T19)/u19;
91
92 % Final Calculations
93 F_mp(k,1) = (1+f)*u9-M0*a0+A9P9_mp*(1-1/P9_P0)+alpha*(u19-M0*a0)+A19P19_mp*(1-1/
P19_P0);
94 Cs = f/F_mp(k,1);
95 I_sp(k,1) = 1/(Cs*g);
96 k = k+1;
97 end
98 alpha = 8:0.1:12;
99
100 figure
101 subplot(1,2,1)
102 plot(alpha,F_mp)
103 xlabel('$\alpha$', 'Interpreter', 'Latex')
104 ylabel('$F/\dot{m}$', 'Interpreter', 'Latex')

```



```

105 title('Sensitivity of  $F/\dot{m}$  over small variations of  $\alpha$ ','Interpreter','
      LaTeX')
106 grid on
107 subplot(1,2,2)
108 plot(alpha,I_sp)
109 xlabel('\alpha','Interpreter','Latex')
110 ylabel('$I_{sp}$','Interpreter','Latex')
111 title('Sensitivity of  $I_{sp}$  over small variations of  $\alpha$ ','Interpreter','
      LaTeX')
112 grid on

```

Listing 2: Code used to obtain the sensitivity of F/\dot{m} and I_{sp} to small variations of α and its plots

B.3 Sensitivity of F/\dot{m} and I_{sp} to small variations of π_{HPC}

```

1 clear all; clc;
2
3 % 1. INPUT DATA
4 % Physical data
5 gamma_c=1.4;
6 gamma_t=1.3;
7 h=43e6;
8 Rg=287;
9 g = 9.81;
10 Cpc=gamma_c/(gamma_c-1)*Rg;
11 Cpt=gamma_t/(gamma_t-1)*Rg;
12 % Operational data
13 M0=0.84;
14 H=11e3;
15 Tt4=1450; % K
16 nd=0.98;
17 eLPC=0.89;
18 eIPC=0.98;
19 eHPC=0.89;
20 nb=0.96;
21 eb=0.99;
22 eHPT=0.91;
23 eIPT=0.91;
24 eLPT=0.93;
25 emH=0.993;
26 emI=0.995;
27 emL=0.997;
28 nnp=0.99;
29 nns=0.99;
30 % Parameters to analyze
31 alpha=9.6;
32 nLPC=1.6;
33 nIPC=5;
34
35 F_mp = zeros(21,1);
36 I_sp = zeros(21,1);
37 k = 1;
38 for nHPC = 5.5:0.1:7.5
39
40     % -----TURBOFAN STUDY-----
41
42     % Static pressure and temperature
43     T0=288.15-0.0065*H;
44     P0=101325*(T0/288.15)^5.256;
45
46     % 0. Free stream conditions
47     d0=(1+(gamma_c-1)/2*M0^2)^(gamma_c/(gamma_c-1));

```



```

48 theta0=1+(gamma_c-1)/2*M0^2;
49 a0 = sqrt(gamma_c*Rg*T0);
50
51 % Inlet=not relevant
52 % 2. Compressor
53 tLPC=1+(nLPC^((gamma_c-1)/gamma_c)-1)/eLPC;
54 tIPC=1+(nIPC^((gamma_c-1)/gamma_c)-1)/eIPC;
55 tHPC=1+(nHPC^((gamma_c-1)/gamma_c)-1)/eHPC;
56 % 3. Combustion chamber
57 theta_t=Tt4/T0;
58 f(k,1)=(Cpt*Tt4-Cpc*theta0*tLPC*tHPC*tIPC*T0)/(eb*h-Cpt*Tt4);
59 % 4. Turbine
60 tHPT=1-(Cpc*theta0*T0*tLPC*tIPC*(tHPC-1))/(emH*(1+f(k,1))*Cpt*Tt4);
61 tIPT=1-(Cpc*theta0*T0*tLPC*(tIPC-1))/(emI*(1+f(k,1))*Cpt*Tt4*tHPT);
62 tLPT=1-(Cpc*theta0*T0*(1+alpha)*(tLPC-1))/(emL*(1+f(k,1))*Cpt*Tt4*tHPT*tIPT);
63 nHPT = (1-(1-tHPT)/(eHPT))^((gamma_t)/(gamma_t-1));
64 nIPT = (1-(1-tIPT)/(eIPT))^((gamma_t)/(gamma_t-1));
65 nLPT = (1-(1-tLPT)/(eLPT))^((gamma_t)/(gamma_t-1));
66 % 9. Nozzle
67 % Primary flow
68 Pt9_P0 = d0*nb*nLPC*nIPC*nHPC*nd*nHPT*nIPT*nLPT*nnp;
69 M9 = sqrt(2/(gamma_t-1)*(Pt9_P0^((gamma_t-1)/(gamma_t))-1));
70 if M9 > 1
71     P9_P0 = Pt9_P0*(2/(gamma_t+1))^((gamma_t)/(gamma_t-1));
72     M9 = 1;
73 elseif M9 <= 1
74     P9_P0 = 1;
75 end
76 T9 = (Tt4*tHPT*tIPT*tLPT)/(1+(gamma_t-1)/2*M9^2);
77 u9 = M9*sqrt(gamma_t*Rg*T9);
78 A9P9_mp = ((1+f(k,1))*Rg*T9)/u9;
79 % Secondary flow
80 Pt19_P0 = d0*nd*nLPC*nns;
81 M19 = sqrt(2/(gamma_c-1)*(Pt19_P0^((gamma_c-1)/(gamma_c))-1));
82 if M19 > 1
83     P19_P0 = Pt19_P0*(2/(gamma_c+1))^((gamma_c)/(gamma_c-1));
84     M19 = 1;
85 elseif M19 <= 1
86     P19_P0 = 1;
87 end
88 T19 = (2*theta0*tLPC*T0)/(gamma_c+1);
89 u19 = M19*sqrt(gamma_c*Rg*T19);
90 A19P19_mp = (alpha*Rg*T19)/u19;
91
92 % Final Calculations
93 F_mp(k,1) = (1+f(k,1))*u9-M0*a0+A9P9_mp*(1-1/P9_P0)+alpha*(u19-M0*a0)+A19P19_mp
*(1-1/P19_P0);
94 Cs = f(k,1)/F_mp(k,1);
95 I_sp(k,1) = 1/(Cs*g);
96 k = k+1;
97 end
98 nHPC = 5.5:0.1:7.5;
99
100 figure
101 subplot(1,2,1)
102 plot(nHPC,F_mp)
103 xlabel('\pi_{HPC}', 'Interpreter', 'Latex')
104 ylabel('$F/\dot{m}$', 'Interpreter', 'Latex')
105 title('Sensitivity of $F/\dot{m}$ over small variations of $\pi_{HPC}$', 'Interpreter',
'Latex')
106 grid on
107 subplot(1,2,2)
108 plot(nHPC,I_sp)
109 xlabel('\pi_{HPC}', 'Interpreter', 'Latex')
110 ylabel('$I_{sp}$', 'Interpreter', 'Latex')

```



```
111 title('Sensitivity of  $I_{sp}$  over small variations of  $\pi_{HPC}$ ','Interpreter','
    Latex')
112 grid on
```

Listing 3: Code used to obtain the sensitivity of F/\dot{m} and I_{sp} to small variations of π_{HPC} and its plots

B.4 Sensitivity of F/\dot{m} and I_{sp} to small variations of π_{IPC}

```
1 clear all; clc;
2
3 % 1. INPUT DATA
4 % Physical data
5 gamma_c=1.4;
6 gamma_t=1.3;
7 h=43e6;
8 Rg=287;
9 g = 9.81;
10 Cpc=gamma_c/(gamma_c-1)*Rg;
11 Cpt=gamma_t/(gamma_t-1)*Rg;
12 % Operational data
13 M0=0.84;
14 H=11e3;
15 Tt4=1450; % K
16 nd=0.98;
17 eLPC=0.89;
18 eIPC=0.98;
19 eHPC=0.89;
20 nb=0.96;
21 eb=0.99;
22 eHPT=0.91;
23 eIPT=0.91;
24 eLPT=0.93;
25 emH=0.993;
26 emI=0.995;
27 emL=0.997;
28 nnp=0.99;
29 nns=0.99;
30 % Parameters to analyze
31 alpha=9.6;
32 nLPC=1.6;
33 nHPC=6.5;
34
35 F_mp = zeros(21,1);
36 I_sp = zeros(21,1);
37 k = 1;
38 for nIPC = 4:0.1:6
39
40     % -----TURBOFAN STUDY-----
41
42     % Static pressure and temperature
43     T0=288.15-0.0065*H;
44     P0=101325*(T0/288.15)^5.256;
45
46     % 0. Free stream conditions
47     d0=(1+(gamma_c-1)/2*M0^2)^(gamma_c/(gamma_c-1));
48     theta0=1+(gamma_c-1)/2*M0^2;
49     a0 = sqrt(gamma_c*Rg*T0);
50
51     % Inlet=not relevant
52     % 2. Compressor
53     tLPC=1+(nLPC^((gamma_c-1)/gamma_c)-1)/eLPC;
```



```

54  tIPC=1+(nIPC^((gamma_c-1)/gamma_c-1)/eIPC;
55  tHPC=1+(nHPC^((gamma_c-1)/gamma_c-1)/eHPC;
56  % 3. Combustion chamber
57  theta_t=Tt4/T0;
58  f=(Cpt*Tt4-Cpc*theta0*tLPC*tHPC*tIPC*T0)/(eb*h-Cpt*Tt4);
59  % 4. Turbine
60  tHPT=1-(Cpc*theta0*T0*tLPC*tIPC*(tHPC-1))/(emH*(1+f)*Cpt*Tt4);
61  tIPT=1-(Cpc*theta0*T0*tLPC*(tIPC-1))/(emI*(1+f)*Cpt*Tt4*tHPT);
62  tLPT=1-(Cpc*theta0*T0*(1+alpha)*(tLPC-1))/(emL*(1+f)*Cpt*Tt4*tHPT*tIPT);
63  nHPT = (1-(1-tHPT)/(eHPT))^((gamma_t)/(gamma_t-1));
64  nIPT = (1-(1-tIPT)/(eIPT))^((gamma_t)/(gamma_t-1));
65  nLPT = (1-(1-tLPT)/(eLPT))^((gamma_t)/(gamma_t-1));
66  % 9. Nozzle
67  % Primary flow
68  Pt9_P0 = d0*nb*nLPC*nIPC*nHPC*nd*nHPT*nIPT*nLPT*nnp;
69  M9 = sqrt(2/(gamma_t-1)*(Pt9_P0^((gamma_t-1)/(gamma_t))-1));
70  if M9 > 1
71     P9_P0 = Pt9_P0*(2/(gamma_t+1))^((gamma_t)/(gamma_t-1));
72     M9 = 1;
73  elseif M9 <= 1
74     P9_P0 = 1;
75  end
76  T9 = (Tt4*tHPT*tIPT*tLPT)/(1+(gamma_t-1)/2*M9^2);
77  u9 = M9*sqrt(gamma_t*Rg*T9);
78  A9P9_mp = ((1+f)*Rg*T9)/u9;
79  % Secondary flow
80  Pt19_P0 = d0*nd*nLPC*nns;
81  M19 = sqrt(2/(gamma_c-1)*(Pt19_P0^((gamma_c-1)/(gamma_c))-1));
82  if M19 > 1
83     P19_P0 = Pt19_P0*(2/(gamma_c+1))^((gamma_c)/(gamma_c-1));
84     M19 = 1;
85  elseif M19 <= 1
86     P19_P0 = 1;
87  end
88  T19 = (2*theta0*tLPC*T0)/(gamma_c+1);
89  u19 = M19*sqrt(gamma_c*Rg*T19);
90  A19P19_mp = (alpha*Rg*T19)/u19;
91
92  % Final Calculations
93  F_mp(k,1) = (1+f)*u9-M0*a0+A9P9_mp*(1-1/P9_P0)+alpha*(u19-M0*a0)+A19P19_mp*(1-1/
P19_P0);
94  Cs = f/F_mp(k,1);
95  I_sp(k,1) = 1/(Cs*g);
96  k = k+1;
97  end
98  nIPC = 4:0.1:6;
99
100 figure
101 subplot(1,2,1)
102 plot(nIPC,F_mp)
103 xlabel('$\pi_{IPC}$','Interpreter','Latex')
104 ylabel('$F/\dot{m}$','Interpreter','Latex')
105 title('Sensitivity of $F/\dot{m}$ over small variations of $\pi_{IPC}$','Interpreter',
'Latex')
106 grid on
107 subplot(1,2,2)
108 plot(nIPC,I_sp)
109 xlabel('$\pi_{IPC}$','Interpreter','Latex')
110 ylabel('$I_{sp}$','Interpreter','Latex')
111 title('Sensitivity of $I_{sp}$ over small variations of $\pi_{IPC}$','Interpreter',
'Latex')
112 grid on

```

Listing 4: Code used to obtain the sensitivity of F/\dot{m} and I_{sp} to small variations of π_{IPC} and its plots



B.5 Sensitivity of F/\dot{m} and I_{sp} to small variations of π_{LPC} and efficiency variations

```

1 clear all; clc;
2
3 % 1. INPUT DATA
4 % Physical data
5 gamma_c=1.4;
6 gamma_t=1.3;
7 h=43e6;
8 Rg=287;
9 g = 9.81;
10 Cpc=gamma_c/(gamma_c-1)*Rg;
11 Cpt=gamma_t/(gamma_t-1)*Rg;
12 % Operational data
13 M0=0.84;
14 H=11e3;
15 Tt4=1450; % K
16 nd=0.98;
17 eLPC=0.89;
18 eIPC=0.98;
19 eHPC=0.89;
20 nb=0.96;
21 eb=0.99;
22 eHPT=0.91;
23 eIPT=0.91;
24 eLPT=0.93;
25 emH=0.993;
26 emI=0.995;
27 emL=0.997;
28 nnp=0.99;
29 nns=0.99;
30 % Parameters to analyze
31 alpha=9.4;
32 nIPC=5.6;
33 nHPC=6.8;
34
35 F_mp = zeros(81,1);
36 I_sp = zeros(81,1);
37 k = 1;
38 for nLPC = 1:0.01:1.8
39
40     % -----TURBOFAN STUDY-----
41
42     % Static pressure and temperature
43     T0=288.15-0.0065*H;
44     P0=101325*(T0/288.15)^5.256;
45
46     % 0. Free stream conditions
47     d0=(1+(gamma_c-1)/2*M0^2)^(gamma_c/(gamma_c-1));
48     theta0=1+(gamma_c-1)/2*M0^2;
49     a0 = sqrt(gamma_c*Rg*T0);
50
51     % Inlet=not relevant
52     % 2. Compressor
53     tLPC=1+(nLPC^((gamma_c-1)/gamma_c)-1)/eLPC;
54     tIPC=1+(nIPC^((gamma_c-1)/gamma_c)-1)/eIPC;
55     tHPC=1+(nHPC^((gamma_c-1)/gamma_c)-1)/eHPC;
56     % 3. Combustion chamber
57     theta_t=Tt4/T0;
58     f=(Cpt*Tt4-Cpc*theta0*tLPC*tHPC*tIPC*T0)/(eb*h-Cpt*Tt4);
59     % 4. Turbine
60     tHPT=1-(Cpc*theta0*T0*tLPC*tIPC*(tHPC-1))/(emH*(1+f)*Cpt*Tt4);
61     tIPT=1-(Cpc*theta0*T0*tLPC*(tIPC-1))/(emI*(1+f)*Cpt*Tt4*tHPT);
62     tLPT=1-(Cpc*theta0*T0*(1+alpha)*(tLPC-1))/(emL*(1+f)*Cpt*Tt4*tHPT*tIPT);

```



```

63 nHPT = (1-(1-tHPT)/(eHPT))^(gamma_t/(gamma_t-1));
64 nIPT = (1-(1-tIPT)/(eIPT))^(gamma_t/(gamma_t-1));
65 nLPT = (1-(1-tLPT)/(eLPT))^(gamma_t/(gamma_t-1));
66 % 9. Nozzle
67 % Primary flow
68 Pt9_P0 = d0*nb*nLPC*nIPC*nHPC*nd*nHPT*nIPT*nLPT*nnp;
69 M9 = sqrt(2/(gamma_t-1)*(Pt9_P0^(gamma_t-1)/(gamma_t))-1);
70 if M9 > 1
71     P9_P0 = Pt9_P0*(2/(gamma_t+1))^(gamma_t/(gamma_t-1));
72     M9 = 1;
73 elseif M9 <= 1
74     P9_P0 = 1;
75 end
76 T9 = (Tt4*tHPT*tIPT*tLPT)/(1+(gamma_t-1)/2*M9^2);
77 u9 = M9*sqrt(gamma_t*Rg*T9);
78 A9P9_mp = ((1+f)*Rg*T9)/u9;
79 % Secondary flow
80 Pt19_P0 = d0*nd*nLPC*nns;
81 M19 = sqrt(2/(gamma_c-1)*(Pt19_P0^(gamma_c-1)/(gamma_c))-1);
82 if M19 > 1
83     P19_P0 = Pt19_P0*(2/(gamma_c+1))^(gamma_c/(gamma_c-1));
84     M19 = 1;
85 elseif M19 <= 1
86     P19_P0 = 1;
87 end
88 T19 = (2*theta0*tLPC*T0)/(gamma_c+1);
89 u19 = M19*sqrt(gamma_c*Rg*T19);
90 A19P19_mp = (alpha*Rg*T19)/u19;
91
92 % Final Calculations
93 F_mp(k,1) = (1+f)*u9-M0*a0+A9P9_mp*(1-1/P9_P0)+alpha*(u19-M0*a0)+A19P19_mp*(1-1/
P19_P0);
94 Cs = f/F_mp(k,1);
95 I_sp(k,1) = 1/(Cs*g);
96
97 % Efficiencies
98 u0=M0*a0;
99 Pt9_P0_prima = d0*nb*nLPC*nIPC*nHPC*nd*nHPT*nIPT*nLPT*nnp;
100 M9_prima=sqrt(2/(gamma_t-1)*((Pt9_P0_prima)^(gamma_t-1)/gamma_t)-1);
101 Tt9=Tt4*tLPT*tIPT*tHPT;
102 T9_prima=Tt9/(1+M9_prima^2*(gamma_t-1)/2);
103 u9_prima=M9_prima*sqrt(gamma_t*Rg*T9_prima);
104
105 Pt19_P0_prima=d0*nd*nLPC*nns;
106 M19_prima=sqrt(2/(gamma_c-1)*(Pt19_P0_prima^(gamma_c-1)/gamma_c)-1);
107 Tt19=T0*theta0;
108 T19_prima=Tt19/(1+M19_prima^2*(gamma_c-1)/2);
109 u19_prima=M19_prima*sqrt(gamma_c*Rg*T19_prima);
110
111 eth(k,1)=(1/2*((1+f)*u9_prima^2+alpha*u19_prima^2-(1+alpha)*u0^2))/(f*h);
112 ep(k,1)=(F_mp(k,1)*u0)/(1/2*((1+f)*u9_prima^2+alpha*u19_prima^2-(1+alpha)*u0^2));
113 eo(k,1)=eth(k,1)*ep(k,1);
114
115 k = k+1;
116 end
117 nLPC = 1:0.01:1.8;
118
119 figure
120 subplot(1,2,1)
121 plot(nLPC,F_mp)
122 xlabel('$\pi_{LPC}$','Interpreter','Latex')
123 ylabel('$F/\dot{m}$','Interpreter','Latex')
124 title('Sensitivity of $F/\dot{m}$ over small variations of $\pi_{LPC}$','Interpreter',
,'Latex')
125 grid on

```



```

126 subplot(1,2,2)
127 plot(nLPC,I_sp)
128 xlabel('\pi_{LPC}','Interpreter','Latex')
129 ylabel('$I_{sp}$','Interpreter','Latex')
130 title('Sensitivity of $I_{sp}$ over small variations of $\pi_{LPC}$','Interpreter','
    Latex')
131 grid on
132
133 %% -----EFFICIENCIES-----
134
135 figure
136 subplot(2,2,1)
137 plot(nLPC,eth)
138 xlabel('\pi_{LPC}','Interpreter','Latex')
139 ylabel('\eta_{th}','Interpreter','Latex')
140 title('Sensitivity of $\eta_{th}$ over small variations of $\pi_{LPC}$','Interpreter',
    , 'Latex')
141 grid on
142 subplot(2,2,2)
143 plot(nLPC,ep)
144 xlabel('\pi_{LPC}','Interpreter','Latex')
145 ylabel('\eta_{p}','Interpreter','Latex')
146 title('Sensitivity of $\eta_{p}$ over small variations of $\pi_{LPC}$','Interpreter',
    'Latex')
147 grid on
148 subplot(2,2,[3,4])
149 plot(nLPC,eo)
150 xlabel('\pi_{LPC}','Interpreter','Latex')
151 ylabel('\eta_{o}','Interpreter','Latex')
152 title('Sensitivity of $\eta_{o}$ over small variations of $\pi_{LPC}$','Interpreter',
    'Latex')
153 grid on

```

Listing 5: Code used to obtain the sensitivity of F/\dot{m} and I_{sp} to small variations of π_{LPC} and efficiency variations as well as its plots.

Teamwork Assignment

Three-spool turbofan

— PROPULSION —

SG, IG i FH

Group members: 

Professor: Josep Oriol Lizandra Dalmases

Deadline: April 28th 2021

1 DESCRIPTION

Consider a three-spool turbofan with convergent nozzles, as depicted in the figure below, according to the following arrangement:

- Low-Pressure Compressor (fan) between stations (2) and (2.1) \equiv (1.3), driven by a Low-Pressure Turbine between stations (4.5) and (5).
- Intermediate-Pressure Compressor between stations (2.1) and (2.5), driven by an Intermediate-Pressure Turbine between stations (4.1) and (4.5).
- High-Pressure Compressor between stations (2.5) and (3), driven by a High-Pressure Turbine between stations (4) and (4.1).

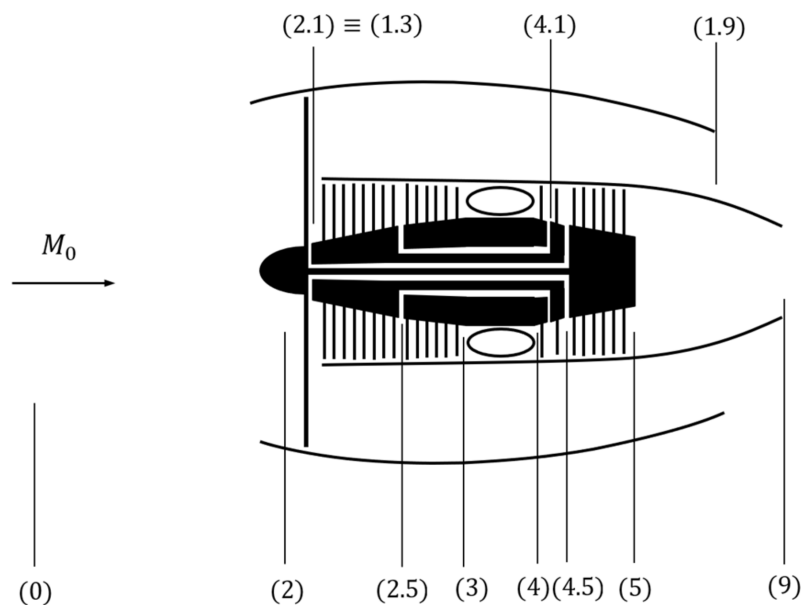


Figure 1: Schematic view of the turbofan geometry.

The following component efficiencies will be assumed:

π_d	η_{LPC}	η_{IPC}	η_{HPC}	π_b	η_b	η_{HPT}	η_{IPT}	η_{LPT}	η_{mH}	η_{mI}	η_{mL}	π_{np}	π_{ns}
0.98	0.89	0.88	0.89	0.96	0.99	0.91	0.91	0.93	0.993	0.995	0.997	0.99	0.99

Table 1: Component efficiencies.

For a flight condition of $M_0 = 0.84$ at an altitude of 11000 m ISA, and assuming a turbine inlet temperature $T_{t4} = 1450$ K, the following is requested:

1. Find a set of parameters α , π_{LPC} , π_{IPC} , π_{HPC} that give reasonably good values of both the specific thrust F/\dot{m} and specific impulse I_{sp} .
2. Analyze and plot the sensibility of F/\dot{m} and I_{sp} to small variations of each parameter in a range about its nominal value, keeping constant the rest of them.
3. According to the results of question 2), select a new set of values for α , π_{LPC} , π_{IPC} , π_{HPC} , and compute the variation of F/\dot{m} and I_{sp} .
4. If all the parameters are kept constant, except for the fan pressure ratio π_{LPC} , that is free to vary in a certain range, compute the thermal, propulsive and overall efficiencies against π_{LPC} .

Assume $\gamma_c=1.4$, $\gamma_t=1.3$, $R_g=287 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ and $h=43 \text{ MJkg}^{-1}$.

2 COMPUTATION OF UNKNOWN PARAMETERS

2.1 Hypothesis

For each stage, the following hypotheses will be assumed:

- Steady quasi-one-dimensional flow.
- Perfect and calorically perfect gas throughout all the engine.
- Specific heats ratio (adiabatic coefficient) is $\gamma_c = 1.4$ for the "cold" zone as well as for the secondary flow, and $\gamma_t = 1.3$ for the hot zone.

2.2 Obtainment of the expressions for each unknown

Specific thrust for a turbofan engine is computed as followed:

$$\frac{F}{\dot{m}} = (1 + f)u_9 + (1 + f)\frac{RT_9}{u_9} \left(1 - \frac{p_0}{p_9}\right) + \alpha u_{19} + \alpha \frac{RT_{19}}{u_{19}} \left(1 - \frac{p_0}{p_{19}}\right) - (1 + \alpha)M_0 a_0 \quad (1)$$

Specific impulse is obtained from the following expression:

$$I_{sp} = \frac{F}{\dot{m}fg} = \frac{F/\dot{m}}{fg} \quad (2)$$

Firstly, as we are assuming ISA atmospheric conditions, for 11000 m of altitude, we depart from the following conditions of the undisturbed flow stream:

$$T_0 = 216.65 \text{ K} \quad P_0 = 22632 \text{ Pa} \quad a_0 = 295.07 \text{ m/s}$$

Also, previous to the resolution of the problem, we can determinate the specific heats at constant pressure for the "cold" and hot zones from its respective adiabatic coefficients:

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R_g \quad \longrightarrow \quad c_{pc} = 1004,5 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \quad c_{pt} = 1243,67 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$$

From here, we are going to calculate the fluid conditions and parameters for each stage, following the order of the processes that the fluid is submitted to, in order to obtain the values of specific thrust and specific impulse as a function of the bypass ratio α and compressors stagnation pressure ratios.

FREE STREAM

For free stream conditions we can compute the stagnation to static ratios and the stagnation pressure and stagnation temperature:

$$\sigma_0 = \frac{T_{t0}}{T_0} = 1 + \frac{\gamma_c - 1}{2} M_0^2 \quad \longrightarrow \quad \sigma_0 = 1,411 \quad T_{t0} = 247.22 \text{ K}$$

$$\delta_0 = \frac{p_{t0}}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma_c - 1}{2} M_0^2\right)^{\frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1}} \quad \longrightarrow \quad \delta_0 = 1,5873 \quad P_{t0} = 35924 \text{ Pa}$$

ENGINE INLET

For the intake we assume that the stagnation temperature remains constant since inlets are considered virtually adiabatic. On the other hand the process is irreversible due to energy dissipation on the boundary layer, so we may apply the inlet efficiency in order to obtain the new stagnation pressure:

$$T_{t2} = T_{t0} \quad P_{t2} = \pi_d P_{t0} = 35205.52 \text{ Pa}$$

COMPRESSORS

For the three compressors, corresponding to low, intermediate and high pressure stages we must select the proper stagnation pressure ratios in order to define the design of the engine.

$$\pi_{LPC} = \frac{P_{t2.1}}{P_{t2}} \quad \pi_{IPC} = \frac{P_{t2.5}}{P_{t2.1}} \quad \pi_{HPC} = \frac{P_{t3}}{P_{t2.5}}$$

Once these are determined, we can obtain the stagnation temperature ratios by the use of isentropic efficiencies:

$$\tau_{LPC} = 1 + \frac{\frac{\gamma_c - 1}{\pi_{LPC}^{\frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1}}} - 1}{\eta_{LPC}} \quad \tau_{IPC} = 1 + \frac{\frac{\gamma_c - 1}{\pi_{IPC}^{\frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1}}} - 1}{\eta_{IPC}} \quad \tau_{HPC} = 1 + \frac{\frac{\gamma_c - 1}{\pi_{HPC}^{\frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1}}} - 1}{\eta_{HPC}} \quad (3)$$

COMBUSTOR

The stagnation pressure decrease due to heat transfer, thermo-chemical conversions and viscous effects is determined by the efficiency:

$$P_{t4} = \pi_b P_{t3} \quad \text{where} \quad P_{t3} = P_{t2} \pi_{LPC} \pi_{IPC} \pi_{HPC}$$

Fuel fraction f can be found by an energy balance in the combustor, assuming it as an adiabatic process with an combustion efficiency η_b :

$$\underbrace{\dot{m}_f h}_{\text{fuel enthalpy}} \quad \eta_b = \frac{\underbrace{(\dot{m} + \dot{m}_f) c_{p_t} T_{t4}}_{\text{exhaust gases enthalpy}} - \underbrace{\dot{m} c_{p_c} T_{t3}}_{\text{entering air enthalpy}}}{\dot{m}_f h}$$

Yielding:

$$f = \frac{c_{p_t} T_{t4} - c_{p_c} T_{t3}}{\eta_b h - c_{p_t} T_{t4}} \quad \text{where} \quad T_{t3} = \tau_{LPC} \tau_{IPC} \tau_{HPC} T_{t2} \quad (4)$$

TURBINES

The data known for turbines that will be useful to us is the isentropic efficiencies, that relates the stagnation pressure ratio and the stagnation temperature ratio of each turbine:

$$\pi_{LPT} = \left(1 - \frac{1 - \tau_{LPT}}{\eta_{LPT}}\right)^{\frac{\gamma_t}{\gamma_t - 1}} \quad \pi_{IPT} = \left(1 - \frac{1 - \tau_{IPT}}{\eta_{IPT}}\right)^{\frac{\gamma_t}{\gamma_t - 1}} \quad \pi_{HPT} = \left(1 - \frac{1 - \tau_{HPT}}{\eta_{HPT}}\right)^{\frac{\gamma_t}{\gamma_t - 1}} \quad (5)$$

POWER BALANCES COMPRESSOR-TURBINE

Mechanical efficiencies being given, from the computation of the power balances between the turbines and the compressors we can obtain the stagnation temperature ratios of each shaft.

$$\left. \begin{aligned} \dot{W}_{LPC} = \eta_{mL} \dot{W}_{LPT} &\longrightarrow \dot{m}(1 + \alpha)c_{pc}T_{t0}(\tau_{LPC} - 1) = \eta_{mL}\dot{m}(1 + f)c_{pt}T_{t4}\tau_{HPT}\tau_{IPT}(1 - \tau_{LPT}) \\ \dot{W}_{IPC} = \eta_{mI} \dot{W}_{IPT} &\longrightarrow \dot{m}c_{pc}T_{t0}\tau_{LPC}(\tau_{IPC} - 1) = \eta_{mI}\dot{m}(1 + f)c_{pt}T_{t4}\tau_{HPT}(1 - \tau_{IPT}) \\ \dot{W}_{HPC} = \eta_{mH} \dot{W}_{HPT} &\longrightarrow \dot{m}c_{pc}T_{t0}\tau_{LPC}\tau_{IPC}(\tau_{HPC} - 1) = \eta_{mH}\dot{m}(1 + f)c_{pt}T_{t4}(1 - \tau_{HPT}) \end{aligned} \right\}$$

By this point, departing from a specific set of values for each compressor stage' π_C we can obtain each compressor stage τ_C through equation (3). Using equation 4 we obtain the corresponding values of T_{t3} and f . Therefore, deciding a bypass ratio α the unknowns in the above system are the stagnation temperature ratios for each stage of the turbine. Isolating them we obtain:

$$\tau_{HPT} = 1 - \frac{1}{\eta_{mH}} \frac{c_{pc}}{c_{pt}} \frac{1}{1 + f} \frac{T_{t0}\tau_{LPC}\tau_{IPC}(\tau_{HPC} - 1)}{T_{t4}} \quad (6)$$

$$\tau_{IPT} = 1 - \frac{1}{\eta_{mI}} \frac{c_{pc}}{c_{pt}} \frac{1}{1 + f} \frac{T_{t2}\tau_{LPC}(\tau_{IPC} - 1)}{T_{t4}\tau_{HPT}} \quad (7)$$

$$\tau_{LPT} = 1 - \frac{1}{\eta_{mL}} \frac{c_{pc}}{c_{pt}} \frac{1 + \alpha}{1 + f} \frac{T_{t2}(\tau_{LPC} - 1)}{T_{t4}\tau_{HPT}\tau_{IPT}} \quad (8)$$

By computing this values in this order, we can obtain T_{t5} afterwards, needed for computing u_9 . Also, through equation 5, we can obtain the stagnation pressure ratios for each stage of the turbine, and therefore the stagnation pressure P_{t5} .

$$T_{t5} = \tau_{HPT}\tau_{IPT}\tau_{LPT}T_{t4} \quad P_{t5} = \pi_{HPT}\pi_{IPT}\pi_{LPT}P_{t4}$$

PRIMARY NOZZLE

Since the process taking place in the nozzle is considered adiabatic, there is no loss of stagnation temperature. On the other hand, the process is irreversible and so, we must apply the nozzle efficiency.

$$T_{t9} = T_{t5} = \tau_{HPT}\tau_{IPT}\tau_{LPT}T_{t4} \quad (9)$$

$$P_{t9} = \pi_{np}P_{t5} = P_{t2}\pi_{LPC}\pi_{IPC}\pi_{HPC}\pi_b\pi_{HPT}\pi_{IPT}\pi_{LPT}\pi_{np} \quad (10)$$

The exit Mach number will depend on the ratio P_{t9}/P_0 and it will be at most unity as it's restricted by the convergent nozzle. So, if one at first assumes matches nozzle $P_9 = P_0$, the exit Mach number will be:

$$M_9 = \sqrt{\frac{2}{\gamma_t - 1} \left[\left(\frac{P_{t9}}{P_0} \right)^{\frac{\gamma_t - 1}{\gamma_t}} - 1 \right]} \quad (11)$$

If one gets $M_9 > 1$ (our case for both primary and secondary flows), the actual value will be $M_9 = 1$ as we would obtain a choked nozzle, and the corresponding exit pressure, temperature and velocity will be:

$$P_9 = P_{t9} \left(\frac{2}{\gamma_t + 1} \right)^{\frac{\gamma_t}{\gamma_t - 1}} \quad T_9 = \frac{T_{t9}}{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_9^2} \quad u_9 = M_9 \sqrt{\gamma_t R_g T_9} \quad (12)$$

SECONDARY NOZZLE

Exit parameters of the secondary flow will be computes as follows, taking into account that $\pi_f = \pi_{LPC}$ and $\tau_f = \tau_{LPC}$:

$$P_{t1.9} = P_{t2}\pi_f\pi_{ns} \quad T_{t1.9} = T_{t1.3} = T_{t0}\tau_f \quad (13)$$

Then, the same procedure as for the primary nozzle is done, since it's also a convergent nozzle, considering $P_{t1.9}$ and γ_c instead of P_{t9} and γ_t .

2.3 Benchmark engine

In order to select the optimal values for bypass ratio α and stagnation pressure ratios π_{LPC} , π_{IPC} and π_{HPC} , we will set the Rolls-Royce Three-shaft High Bypass Turbofan Engine Trent 1000-A as our benchmark. The specifications of this engine are stated in the following table:

Table 2: Turbofan Engine Specifications [1]

Table 3: Flight conditions

Parameter	Cruise
Height (m)	11000
Mach No.	0.85

Table 4: Parameters needed

Parameter	Cruise
α	10
π_{LPC}	1.54
π_{IPC}	9.61
π_{HPC}	3.38

2.4 Imposing parameters values and results

In the view of the values from table 2, since the flight conditions are highly similar, we decided to set the same values for our parameters:

$$\boxed{\alpha = 10} \quad \boxed{\pi_{LPC} = 1.54} \quad \boxed{\pi_{IPC} = 9.61} \quad \boxed{\pi_{HPC} = 3.38}$$

Thus, we can now compute in the following order our results, using the equations from section 2.2:

$$(3) \longrightarrow \tau_{LPC} = 1.1475 \quad \tau_{IPC} = 2.0328 \quad \tau_{HPC} = 1.4676$$

$$(4) \longrightarrow f = 0.0234$$

$$(6)(7)(8) \longrightarrow \tau_{HPT} = 0.8522 \quad \tau_{IPT} = 0.8119 \quad \tau_{LPT} = 0.6834$$

$$(5) \longrightarrow \pi_{HPT} = 0.4639 \quad \pi_{IPT} = 0.3666 \quad \pi_{LPT} = 0.1648$$

$$(9)(10) \longrightarrow T_{t9} = 685.66 \text{ K} \quad P_{t9} = 46905.56 \text{ Pa}$$

$$(11) \longrightarrow M_9 = 1.1050 > 1 \quad \text{--- chocked nozzle ---} \longrightarrow M_9 = 1$$

$$(12) \longrightarrow P_9 = 25597.67 \text{ Pa} \quad T_9 = 596.22 \text{ K} \quad u_9 = 471.65 \text{ m/s}$$

$$(13) \longrightarrow P_{t1.9} = 53672.33 \text{ Pa} \quad T_{t1.9} = 283.70 \text{ K}$$

$$(11) \longrightarrow M_{1.9} = 1.1829 > 1 \quad \text{--- chocked nozzle ---} \longrightarrow M_{1.9} = 1$$

$$(12) \longrightarrow P_{1.9} = 28354.11 \text{ Pa} \quad T_{1.9} = 236.41 \text{ K} \quad u_{1.9} = 308.21 \text{ m/s}$$

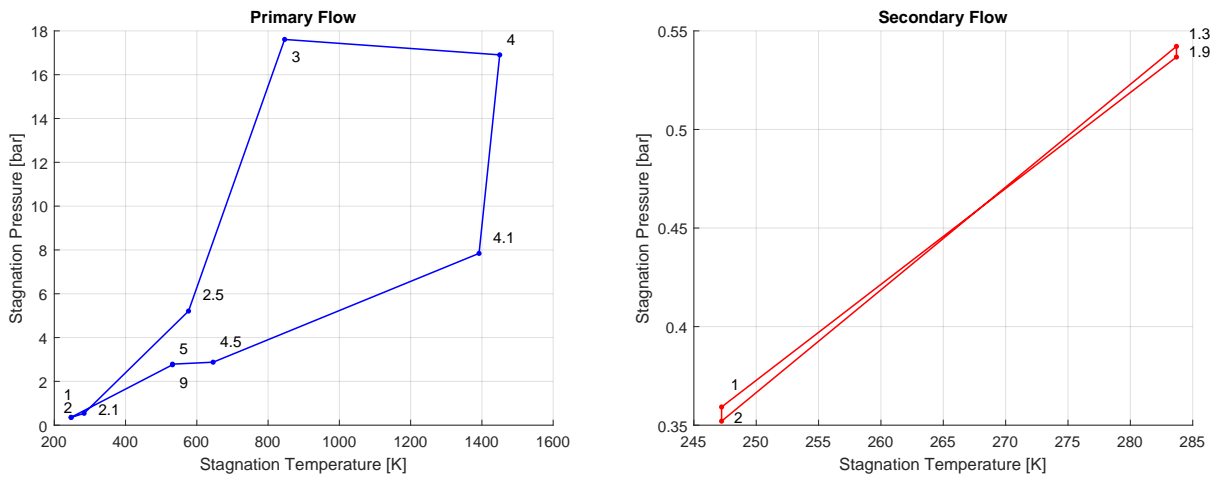
Once all the parameters are determined, we can substitute the values in equations (1) and (2) and finally obtain:

$$\boxed{\frac{F}{\dot{m}} = 1325.90 \frac{Ns}{kg}}$$

$$\boxed{I_{sp} = 5780.90 \text{ s}}$$

2.5 Results plots

In order to portray the later results in a visual manner, the following plots have been made:



(a) P_t & T_t for the primary flow.

(b) P_t & T_t for the secondary flow.

Figure 2: Stagnation Pressure vs Stagnation Temperature.

where it is possible to observe the relation between the stagnation pressure and the stagnation temperature along both primary and secondary flows. As it can be seen, each stage of the engine have been represented by means of plotting their respective values in a scatter plot, naming each point with the upward nomenclature.

3 PARAMETERS VARIATIONS ANALYSIS

For this section we will vary the bypass ratio and the stagnation pressure ratios of each stage of the compressor, while maintaining all the other parameters constants so that we can appreciate its effects on specific thrust and specific impulse.

3.1 α variation

The turbofan takes advantage of the good operating efficiency and high thrust capability of the turbo-prop. The bypass ratio α is the ratio between the mass flow rate of the secondary flow to the mass flow rate entering the core. By increasing α , we are in fact increasing the dose of air flow passing through the secondary nozzle and therefore increasing thrust. In order to achieve this, larger and more aerodynamically efficient fans must be used.

This information can be proved in the top left graph of Figure 3, as both specific impulse and thrust are boosted by the enlargement of the bypass ratio.

In our benchmark engine case, we are already using the highest bypass ratio (10:1) of any Trent. Over 85% of the engine's thrust is generated by the 2.8 m diameter fan. Rolls-Royce is currently in the process of developing Advance 3, a three-spool turbofan whose bypass ratio should exceed 11:1. Therefore, considering a theoretical bypass ratio of 11:1 is no-nonsense.

3.2 π_{LPC} variation

Specific thrust and specific impulse follow a parabolic tendency with a maximum around our benchmark's value.

The compression ratio of the low pressure compressor, which in this case corresponds entirely to the fan, depends amongst other parameters on the diameter of the fan. Having increased the bypass ratio, an increment of π_{LPC} is expected. Consequently, we will consider a new value of 1.55 for this parameter, aiming to improve the performance of the the specific thrust.

3.3 π_{IPC} and π_{HPC} variation

The increment of the compression stagnation pressure ratio of the intermediate and high pressure compressors produce an increase of the specific impulse and a decrease of the specific thrust. The specific thrust diminish can be explained by the pressure, temperature and velocity decline at the exit of the nozzle, due to the need of larger expansion ratio. The specific impulse boost is due to the reduction of the fuel fraction at a higher rate than the specific thrust reduction, on account of the gain of T_{t3} , directly proportional to the values of π_c .

Finally, the new considered values for this variables are $\pi_{IPC} = 9.30$ and $\pi_{HPC} = 3.20$, prioritizing the improvement of the specific thrust.

3.4 Plots

All these relations are computed and shown in the figure 3 below.

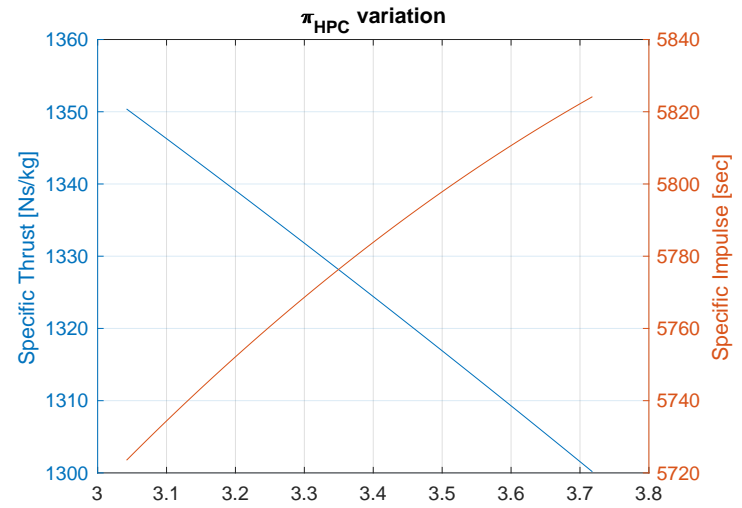
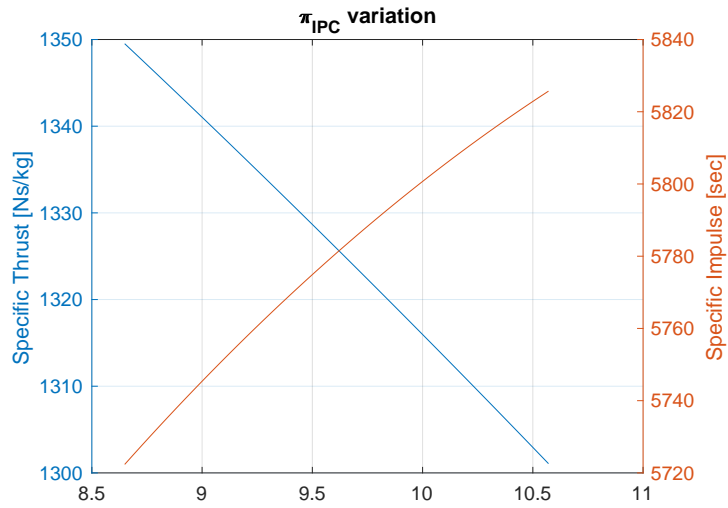
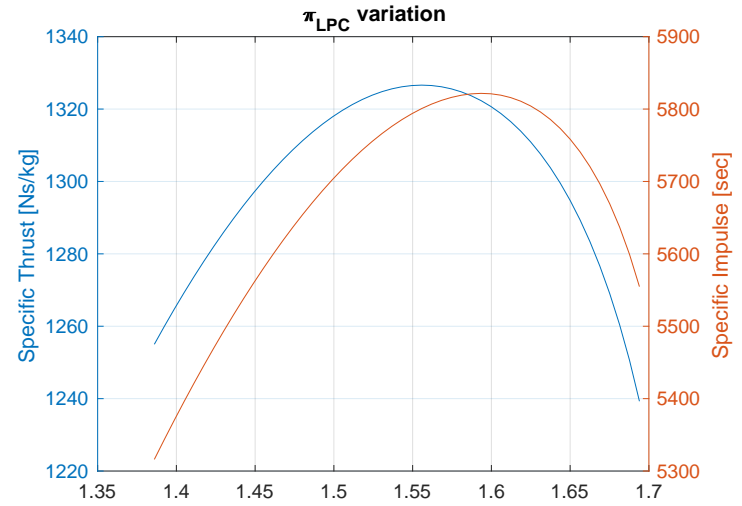
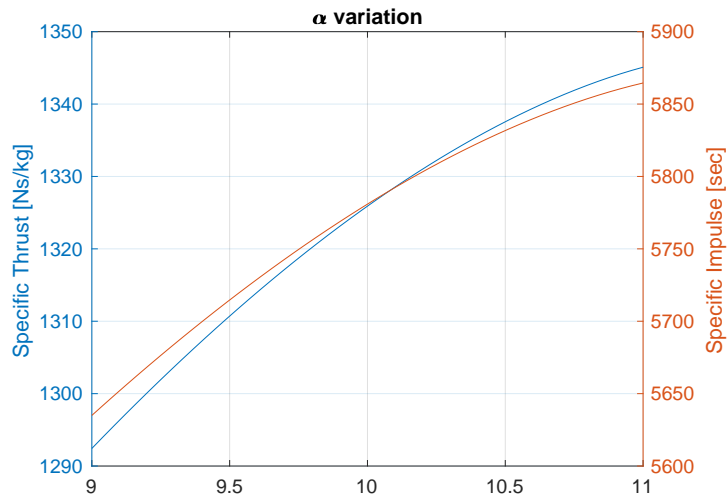


Figure 3: Plot of specific thrust and specific impulse sensibility towards α , π_{LPC} , π_{IPC} and π_{HPC} variation.

4 REELECTION OF THE PARAMETERS VALUES AND THEIR IMPACT

Firstly, even though for a realistic situation the improvement of the performance is insufficient comparing to the effort required to enlarge the bypass ratio, in our theoretical circumstances, we will expand it anyways. Secondly, in view of all the π_C variations and aiming to maximize specific impulse without excessively decreasing the specific thrust, we obtain the new set of values for our parameters:

$$\boxed{\alpha = 11.0} \quad \boxed{\pi_{LPC} = 1.52} \quad \boxed{\pi_{IPC} = 10.55} \quad \boxed{\pi_{HPC} = 3.85}$$

We now compute the new values for specific thrust and specific impulse, and compare it with the previous ones:

Table 5: Variation of performance due to the new set of parameters

	Original parameters	New parameters	Percent increase
Sp. Thrust	1325.90 m/s	1274.19 m/s	-3.90%
Sp. Impulse	5780.90 s	5906.80 s	+2.18%

We have opted for optimizing specific impulse as it is the main aim of the contemporary airlines. The economic concerns, heavily impacted by the fuel consumption, are the target for more affordable air travel. Our results show a 3.9% drop in specific thrust, which implies that the engine is relatively large in diameter for the net thrust it generates.

In turn, we have increased specific impulse by 2.18%, and as it is portrayed in Figure 4, the best approximation was made such that the new set of parameters are located at the peaks of their performances for I_{sp} . For a matter of fact these variables are dependent on each other, Despite not seeming a major improvement, we must relate this to the cost of supplying fuel for an commercial airplane. A good estimation is that a narrow body aircraft like the Boeing 737 operates at around \$1,500 per hour. Hence we could quantify that for such little changes in the engine design we could save up to thousands of dollars at the end of a year.

Regarding to these new values of the variables, their variations are computed in the plot as follows, where the behaviour is similar than the above.

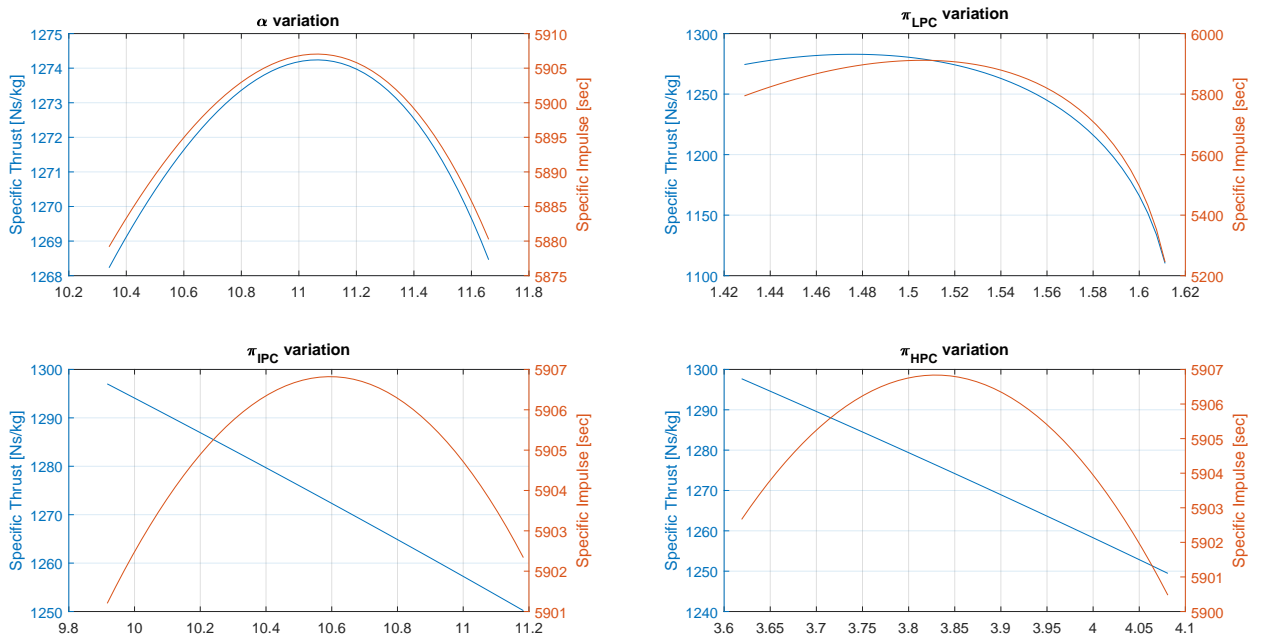


Figure 4: Plot of specific thrust and specific impulse sensibility towards α , π_{LPC} , π_{IPC} and π_{HPC} variation.

5 THERMAL, PROPULSIVE AND OVERALL EFFICIENCIES AGAINST π_{LPC} VARIATION

5.1 Definitions

Thermal efficiency is the ratio between the kinetic energy gain of the fluid (air and gases) if it was a matched nozzle, and the combustion heat provided by fuel. Taking the primary and secondary flows contributions into account we obtain:

$$\eta_{th} = \frac{\frac{1}{2}(\dot{m} + \dot{m}_f)u_{g'}^2 + \frac{1}{2}\alpha\dot{m}u_{1g'}^2 - \frac{1}{2}\dot{m}u_0^2}{\dot{m}_f h} = \frac{(1+f)u_{g'}^2 + \alpha u_{1g'}^2 - u_0^2}{fh} \quad (14)$$

Propulsive efficiency is the ratio between the available power at flight and the gain of kinetic energy of the fluid if it was matched nozzle:

$$\eta_p = \frac{F u_0}{\frac{1}{2}(\dot{m} + \dot{m}_f)u_{g'}^2 + \frac{1}{2}\alpha\dot{m}u_{1g'}^2 - \frac{1}{2}\dot{m}u_0^2} = \frac{\frac{F}{\dot{m}}u_0}{(1+f)u_{g'}^2 + \alpha u_{1g'}^2 - u_0^2} \quad (15)$$

Global efficiency is the ratio between the available power at flight and the combustion heat provided by fuel, therefore is the product of the previous two:

$$\eta_0 = \frac{F u_0}{\dot{m}_f h} = I_{sp} \frac{g u_0}{h} = \eta_{th} \eta_p \quad (16)$$

5.2 Plotting efficiencies against π_{LPC}

For the final analysis of our turbofan we will now compute the thermal, propulsive and global efficiencies as a function of π_f using equations (14), (15) and (16) and obtain Figure 5.

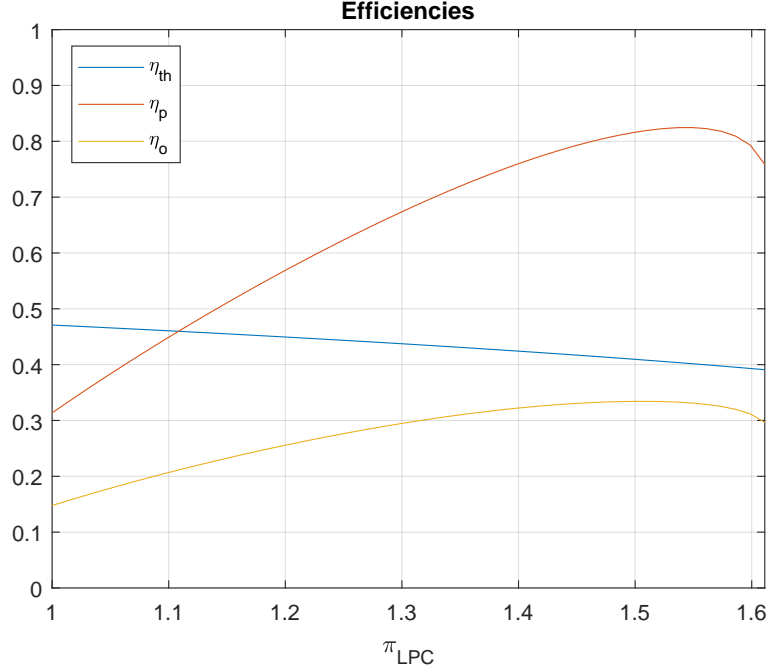


Figure 5: Thermal, propulsive and global efficiencies against π_{LPC} .

In order to understand the variations depicted in the Figure 5, we must bear in mind the variation of specific thrust (F/\dot{m}) and specific impulse ($\frac{F/\dot{m}}{fg}$) as a function of π_{LPC} depicted in the top right subplot of figure 3. Also, we must take into account that h , u_0 and α are constants. Once all these are kept in mind, the plots will give us more valuable information.

Thermal efficiency is related to the motor efficiency. The graph indicates that η_{th} slightly decreases with the π_f increase. Therefore, increasing the stagnation ratio of the low pressure compressor implies a slightly higher need of fuel heat to be provided to the fluid.

Propulsive efficiency is related to the performance of the propulsor, which in our case is the high bypass ratio fan. η_p is considerably boosted by the pressure ratio increase, and presents a maximum when the exhaust velocity (for an hypothetical complete expansion) of both nozzles are equal. This point takes the value of $\pi_{LPC} = 1.5427$.

Finally, *global efficiency* is the product of the two later. As we can draw from the development of equation 16, the variation of η_o matches with the variation curve of the I_{sp} , as the term gu_0/h is a constant. Thus we can remark an increase that culminates at approximately $\pi_f = 1.52$, the value we have set as our new parameter. Therefore, maximizing specific impulse implies maximizing the global efficiency.

6 CONCLUSIONS

In conclusion, we have seen that the optimal values found by us are similar to those used by the benchmark engine. The small differences between our results and the ones used by Rolls Royce could be the result of inaccurate values of efficiencies as well as structural and aerodynamic limitations. In addition, we have studied the effect of varying the parameters α , π_{LPC} , π_{IPC} and π_{HPC} on the specific thrust and specific impulse. Moreover, an analysis of the thermal, propulsive and global efficiencies has been developed, showing the variation of each of those parameters when varying the π_{LPC} .

REFERENCES

- [1] Islam Asoliman, Mohamed Ehab, Abdullah Mahrous, Ahmed El-Sayed, and Mohamed Emeara. Performance analysis of high bypass turbofan engine trent 1000-a *. 07 2018.

TEAMWORK ASSIGNMENT 2 (ROCKETS)

Deadline: 21 June 2021

Description

Consider a rocket stage of a launcher (atmospheric flight), for which the design features are left free for each student team, in particular:

- Qualitative description of the mission trajectory, including an approximate range of altitudes.
- Propellant (either monopropellant or bipropellant) and combustor pressure p_c .
- Structural and payload mass, the sum of which is assumed to range from 8% to 12% of the initial mass (decided by the student team). The remaining percentage is propellant mass.

If applicable (atmospheric flight), use a model of atmosphere according to the particular range of altitudes.

The following is requested:

- Use a thermochemistry software (e.g., CEA) and find the combustor temperature T_c , as well as the molecular mass M of the gas (assume frozen composition) and a suitable mean value of the adiabatic coefficient γ .
- Assuming an area ratio $A_e/A_t = 30$, and a throat area A_t necessary to produce an initial thrust level from 10% to 30% greater than the initial weight, and find the mass flow \dot{m} and the burning time t_b .
- Resize the nozzle and find a new area ratio A_e/A_t that improves the performance in terms of impulse $\Delta V = V_f - V_0$ and gain of altitude Δh , assuming a weight penalty of structural mass to the exit area A_e , according to

$$\Delta m_{st} = m_0 \frac{\Delta A_e}{A_t} \varepsilon \quad \text{with } 0.0005 < \varepsilon < 0.001$$

Remarks:

- Variation of gravity with altitude

$$g = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2}$$

- If an oblique launch is considered, the student team may (optionally) consider thrust vectoring, as well as investigate (in the literature) possible models for both lift and drag coefficients. Alternatively, for a vertical launch, in absence of other sources, the students may use the drag coefficient given in the annex (referred to the reference cross sectional area S_{ref}).

ANNEXES

Annex 1. Drag and drag coefficient

Drag from dynamic pressure, reference cross sectional area and drag coefficient

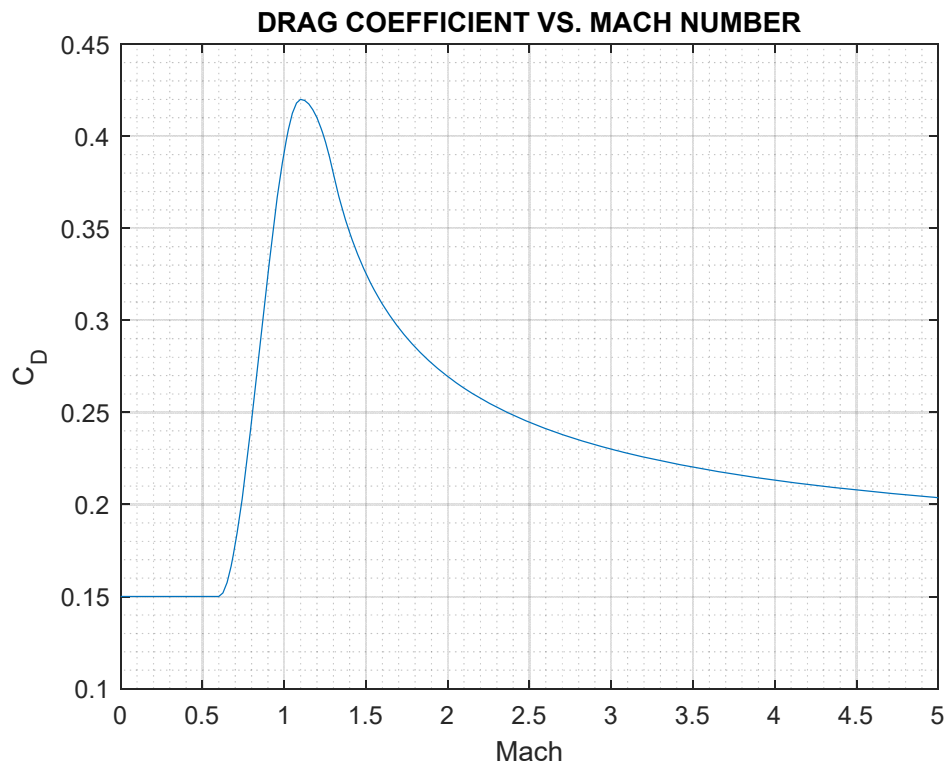
$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S_{ref} C_D$$

$$M \leq 0.6 \rightarrow C_D = 0.15$$

$$0.6 < M \leq 1.1 \rightarrow C_D = -4.32M^3 + 11.016M^2 - 8.5536M + 2.24952$$

$$1.1 < M \leq 1.3 \rightarrow C_D = -M^2 + 2.2M - 0.79$$

$$1.3 < M \leq 5.0 \rightarrow C_D = 0.16769 + \frac{0.17636}{\sqrt{M^2 - 1}}$$



1. Reactius, pressió de cambra i propietats físiques del propulsant

Combustible: RP-1

Oxidant: LOX

O/F: 2.5

$$p_c = 9.7 \text{ MPa} \quad T_c = 3695 \text{ K}$$

$$M = 0.0232 \text{ kg mol}^{-1} \quad R = 358 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1} \quad \gamma = 1.25$$

2. Càlcul de masses, empenyiment, àrea de gola, cabal màssic i temps d'encesa

Es considera la primera etapa d'un llançador, per qual la segona etapa esdevé càrrega útil. A efectes pràctics, per a la primera etapa, la massa estructural m_{str} serà la suma de la massa estructural pròpiament dita de la primera etapa m_{str_1} més la massa total la segona etapa

$$m_{str} = m_{str_1} + m_{pl_1} \quad m_{pl_1} = m_{str_2} + m_{pl_2} + m_{p_2}$$

$$m_0 = m_{str} + m_{p_1}$$

Es prendrà "arbitràriament" $m_{str} = 0.4m_0$, amb $m_0 = 560 \text{ t}$, de manera que

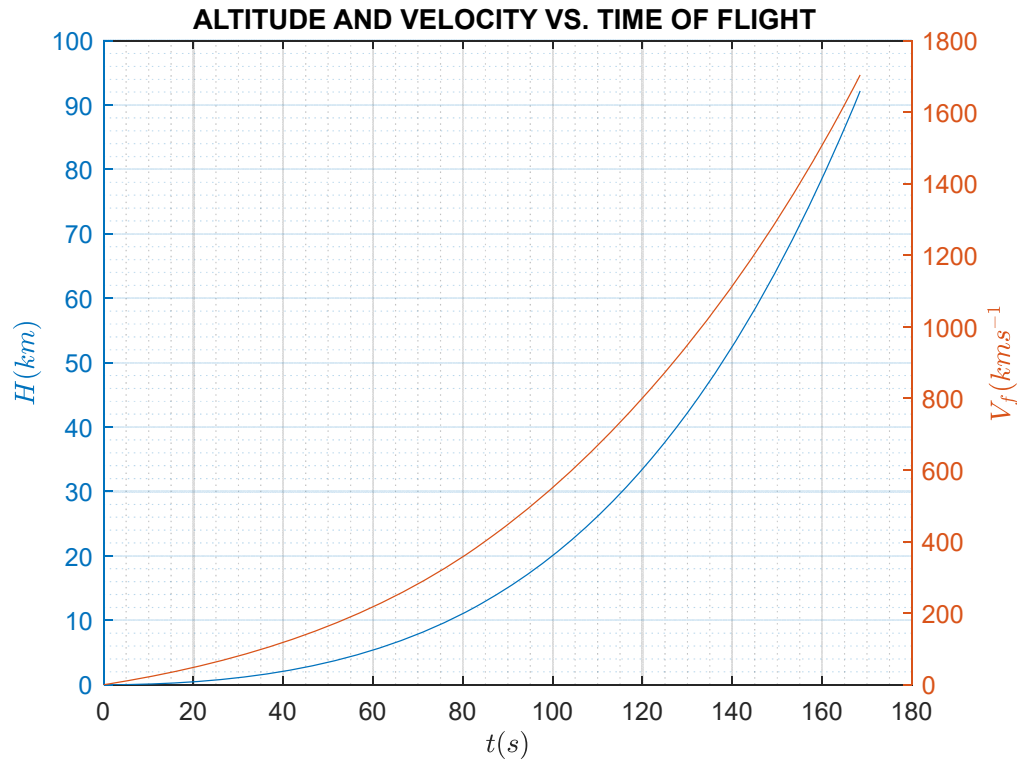
$$m_{p_1} = 336 \text{ t}$$

També se suposarà que en el moment del llançament a nivell del mar l'empenyiment és un 30% superior al pes

$$F_0 = 6.59 \text{ MN}$$

Per les relació d'àrees $A_e/A_t = 30$ indicada a l'enunciat resulta

$$(C_F)_0 = 1.5699 \rightarrow A_t = 0.4329 \text{ m}^2 \rightarrow \dot{m} = 1994.3 \text{ kg s}^{-1} \rightarrow t_b = 168.5 \text{ s}$$



3. Redimensionat de la tovera

La massa estructural es veurà incrementada en proporció a l'increment de l'àrea de sortida

$$\Delta m_{st} = m_0 \frac{\Delta A_e}{A_t} \varepsilon$$

Aquest treball pretenia posar de relleu que incrementar la mida de la tovera també implica un increment de pes, amb uns efectes sobre les prestacions d'aquest.

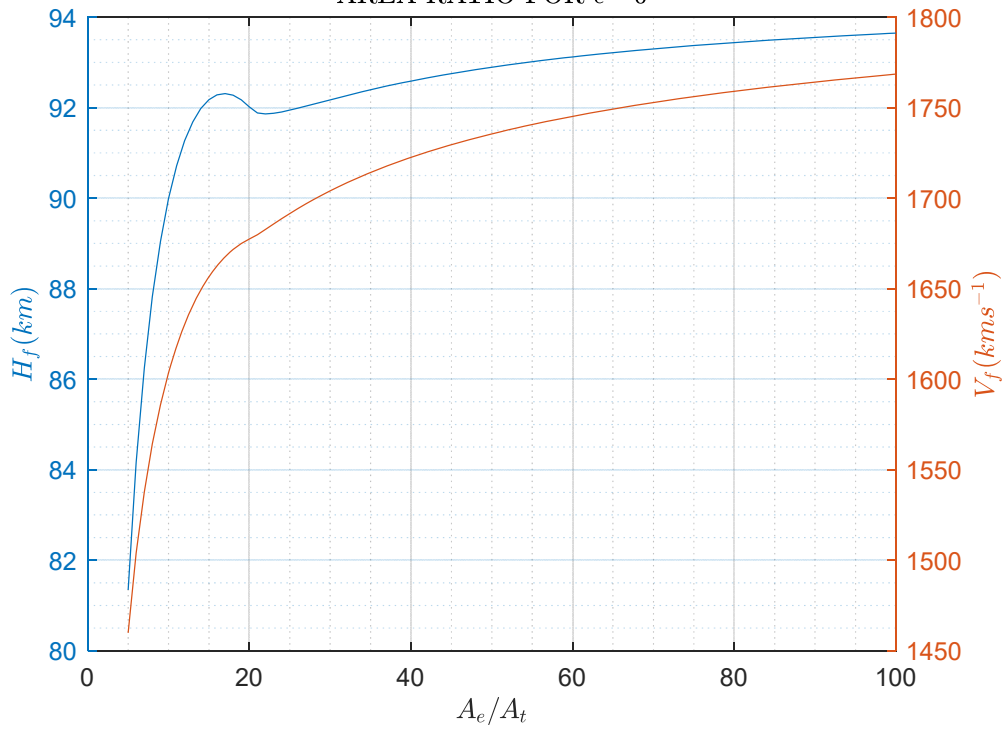
Donada la manca d'informació detallada sobre la massa específica d'una tovera (que dependrà del material, disseny estructural, sistema de refrigeració, etc.) i, per tant, l'efecte que té l'increment d'àrea de la tovera en l'increment de pes d'aquesta, a través del paràmetre ε , a l'enunciat es va suggerir prendre ε en un rang "arbitrari".

Es consideraran tres possibles valors pel coeficient ε

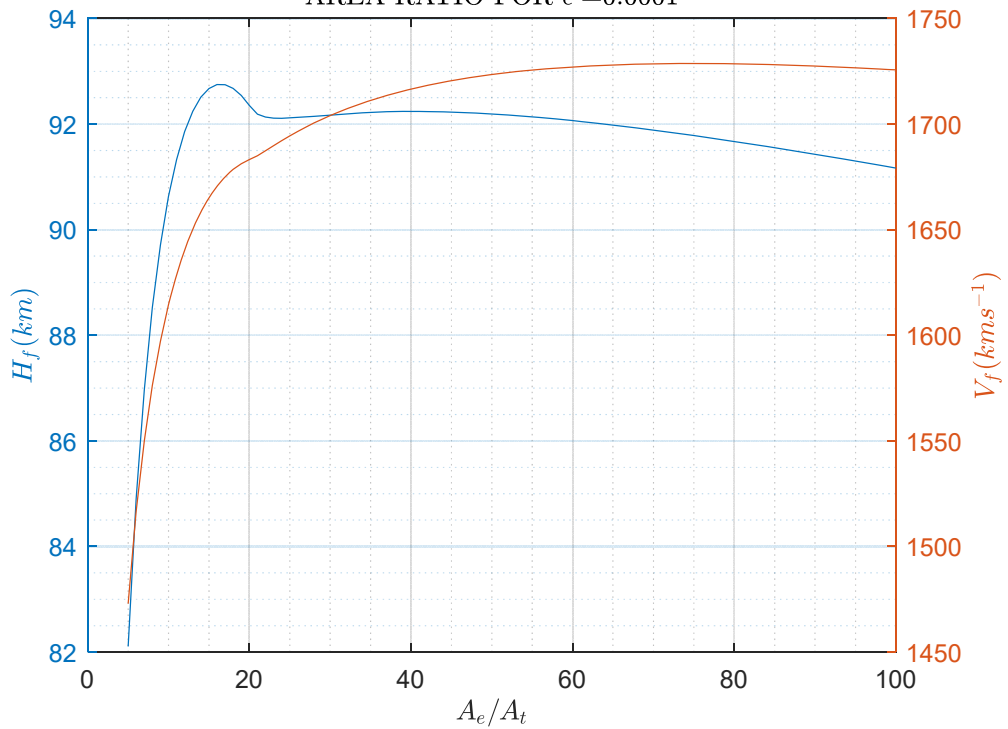
$$\varepsilon = 0 \quad \varepsilon = 0.0001 \quad \varepsilon = 0.0005 \quad \varepsilon = 0.001$$

Dels resultats de les corbes que segueixen, es desprèn que, si fer una tovera més gran no tingués cap penalització (és a dir, el cas $\varepsilon = 0$), com més gran fos la tovera, més alta seria l'altitud i velocitats finals. A mesura que augmenta ε , més petita cal que sigui la tovera per tal de no penalitzar les prestacions del llançador.

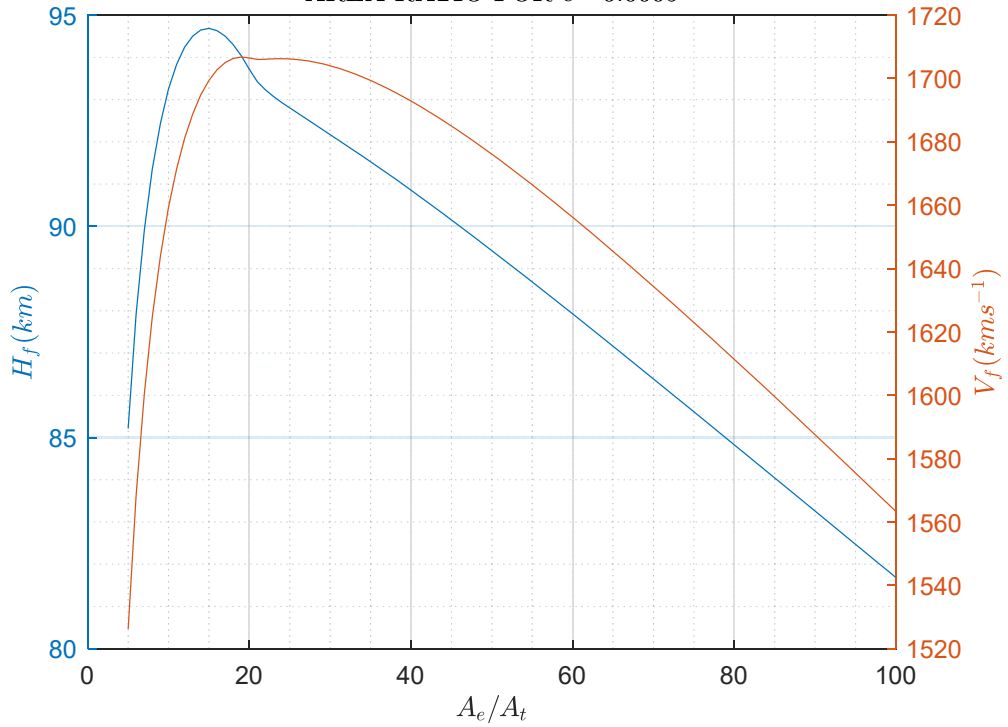
FINAL ALTITUDE AND VELOCITY VS.
AREA RATIO FOR $\epsilon = 0$



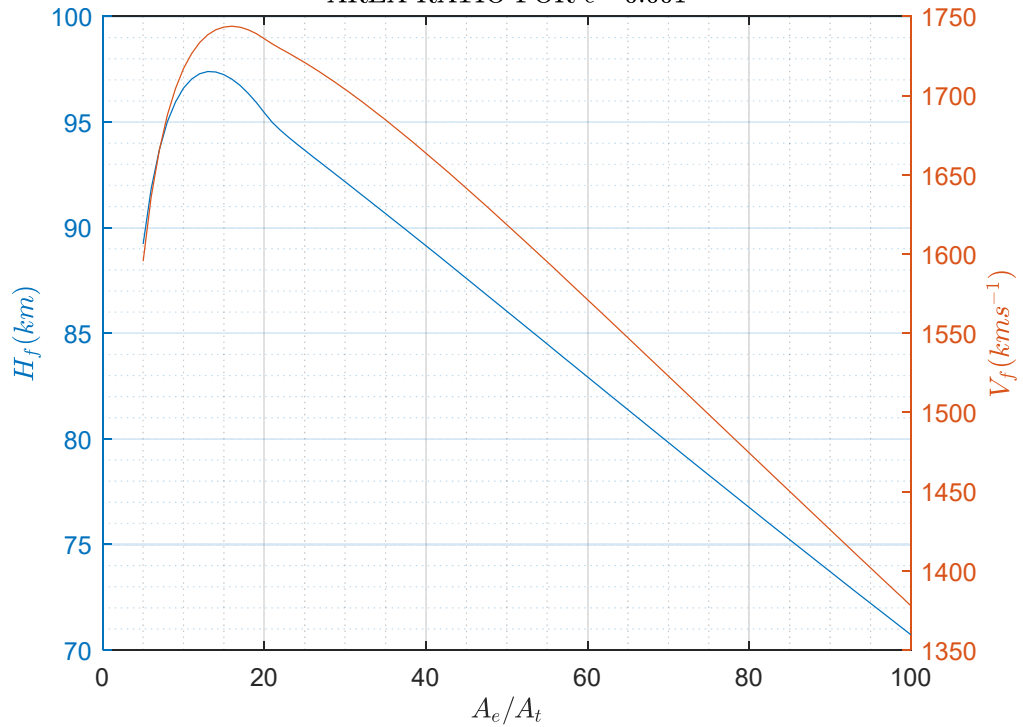
FINAL ALTITUDE AND VELOCITY VS.
AREA RATIO FOR $\epsilon = 0.0001$



FINAL ALTITUDE AND VELOCITY VS.
AREA RATIO FOR $\epsilon = 0.0005$



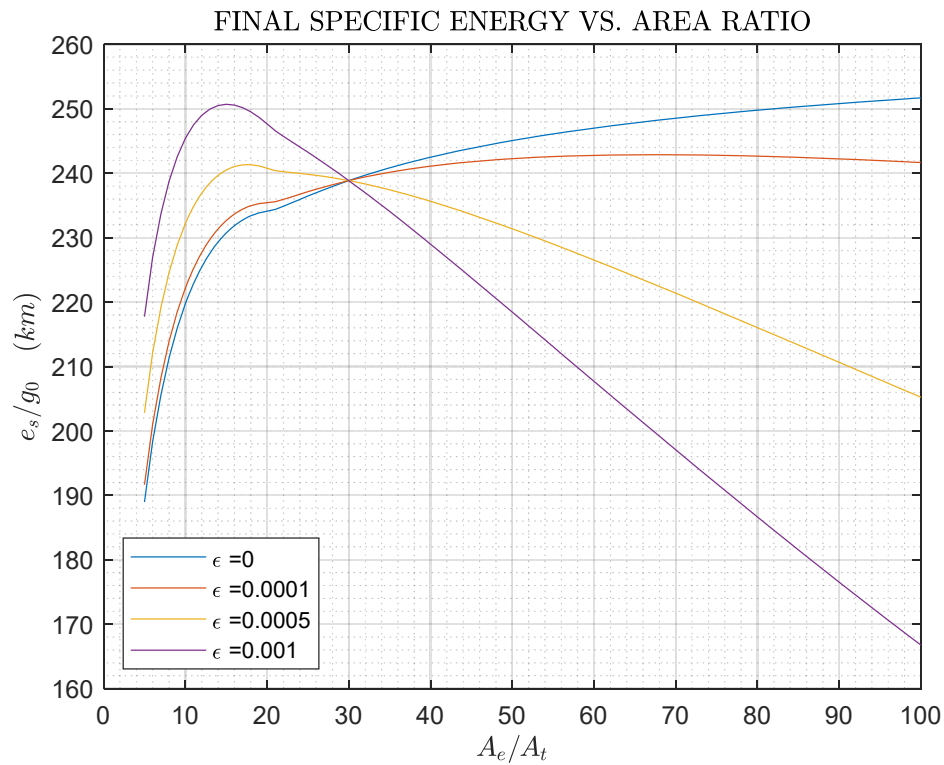
FINAL ALTITUDE AND VELOCITY VS.
AREA RATIO FOR $\epsilon = 0.001$



Es pot valorar de forma global tant l'altitud com la velocitat finals, mitjançant l'energia específica, definida com l'energia potencial (respecte nivell del mar) més la cinètica, per unitat de massa

$$e_s = e_p + \frac{V^2}{2}$$

(que, dividida per la gravetat a nivell del mar g_0 , té unitats d'alçada)





Laboratori d'Enginyeria Acústica i Mecànica
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA, BARCELONATECH

Assignent. Rocket performance.

Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials

Autor



GLL

Professor

Lizandra Dalmases, Josep Oriol

ESCOLA SUPERIOR D' ENGINYERIES INDUSTRIAL, AEROESPACIAL I AUDIOVISUAL
DE TERRASSA (ESEIAAT)

—

Terrassa, Juny 2021

Índex

1	Qualitive description of the trajectory	2
1.1	Acceleration profile	2
1.2	Atmosphere	2
1.2.1	Estructura tèrmica de l'atmosfera	2
1.2.2	Estructura química de l'atmosfera	3
1.2.3	Perfil de pressions de l'atmosfera	3
2	Propellant and rocket parameters	5
3	Throat area, mass flow and burning time	6
4	Rocket performance	8
4.1	Analytic computation	9
4.2	Iterative computation	11

1 Qualitative description of the trajectory

1.1 Acceleration profile

En primer lloc, s'ha plantejat que el coet seguirà una trajectoria rectilínia, i en quant al perfil d'acceacions s'ha optat per un valor constant i uniforme en tota la trajectoria. Encara que es un plantejament poc realista, tant per motius instrínsecs del coet com per les condicions atmosfèriques variables, s'ha seguit aquest plantejament ja que sinó la reasolució analítica de l'apartat 4.1 no es possible.

El valor de l'acceleració s'ha determinat fent una mitja de la contribució de variació de l'acceleració respecte l'altitud. D'aquesta manera, $a = 2.3g_0$.

1.2 Atmosphere

Igual que en l'apartat anterior, alguns dels paràmetres atmosfèrics que varien amb l'altitud s'han discretitzat en diferents etapes de la trajectoria per poder resoldre l'apartat 4.1.

1.2.1 Estructura tèrmica de l'atmosfera

S'ha aproximat linealment les diferents etapes tèrmiques que presenta l'atmosfera:

Capa	$h_i[km]$	$h_f[km]$	$T_i[K]$	$T_f[K]$	Gradient $\lambda[K/m] \times 10^{-3}$
Troposfera	0	11	288.1	216.6	-6.49
Tropopausa	11	20	216.6	216.6	0
Estratosfera	20	47	216.6	282.6	2.44
Estratopausa	47	53	282.6	282.6	0
Mesosfera	53	80	282.6	165.6	-4.33
Termopausa	80	90	165.6	165.6	0
Termosfera	90	400	165.6	355	0.61

TAULA 1: Estructura tèrmica de l'atmosfera.

Concretar que la termosfera es situa aproximadament fins als 500km i la segueix la exosfera. No obstant, la termosfera s'ha limitat als 400km ja que a partir de llavors

la temperatura pren un caracter exponencial amb l'altitud. Per aquest motiu, l'estudi posterior referent al coet contemplarà una trajectòria que té com a objectiu assolir els 400km.

La temperatura, aleshores, es pot coneixer segons:

$$T(h) = T_i + \lambda(h - h_i) \quad (1)$$

on el subíndex i fa referència al inici de la capa en la que s'estigui comprès.

1.2.2 Estructura química de l'atmosfera

Simplificant molt, es pot dividir en dos: la homosfera i la heterosfera. La primera va des del nivell del mar fins aproximadament als 80km d'altitud. Bàsicament conté aire amb una composició dels seus gasos molt regular amb l'altitud, és a dir, la seva massa molecular es pot considerar constant ($MW_{aire} = 28.97g/mol$). Cap al final de la homosfera el oxigen O_2 ja no hi és present i predomina el nitrogen N_2 . Seguidament es troba la heterosfera, que comença amb una caiguda important del N_2 en de la composició de gasos, donant pas a gasos més lleugers: primer el oxigen monoatòmic O , seguit del heli He i el hidrogen H_2 . Una aproximació discreta de la estructura química de l'atmosfera seria:

Gas	$h_i[km]$	$h_f[km]$	$MW[g/mol]$	$R[\frac{J}{kgK}]$	γ
Aire	0	80	28.9645	287.058	1.4
N_2	80	180	28.0134	296.804	1.4
O	180	420	15.9994	519.676	1.67

TAULA 2: Estructura tèrmica de l'atmosfera.

1.2.3 Perfil de pressions de l'atmosfera

Per conèixer la pressió atmosfèrica s'ha plantejat la hipòtesi que els gasos atmosfèrics són perfectes:

$$p = \rho RT \quad (2)$$

La mecànica de fluids en condicions d'hidrostàtica estableix:

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g(h) \quad (3)$$

Considerant que les partícules dels gasos atmosfèrics tenen masses relativament petites, el pes d'aquestes es veu poc afectat per la variació de l'acceleració gravitatòria $g(h)$, és a dir, es pot aproximar $g(h) \approx g_0$. D'aquesta manera, i combinant les expressions 2 i 3 s'obté:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_0}{RT(h)} dz \quad (4)$$

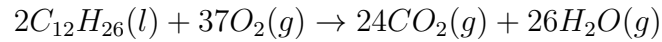
Aplicant la Eq. 1 i integrant:

$$p(h) = p_i \left(\frac{T_i + \lambda(h - h_i)}{T_i} \right)^{-\frac{g_0}{R\lambda}} \quad (5)$$

on R , λ , h_i , T_i i p_i son constants corresponents a cada capa atmosfèrica.

2 Propellant and rocket parameters

El combustible utilitzat es la mescla de oxigen líquit (LOX) y querosé RP-1. La reacció que es dona a la cambra de combustió és:



La temperatura de combustió dins la cambra assolirà els $T_c = 3670K$. La massa molecular dels gasos de combustió resulta $MW = 28g/mol$.

Per tindre uns paràmtres coherents s'han utilitzat els d'un coet real i s'han modificat lleugerament perquè encaixessin bé amb els càlculs. Hi ha una gran diversitat de coets que utilitzen RP-1 amb LOX, però s'ha optat per el *Atlas V*.

La seva massa de combustible és de unes 300 tones (284450kg). La suma de massa estructural i de carga del *Atlas V* és superior al 8-12% de la massa de combustible, de manera que s'ha escollit la massa màxima, obtenint així 323 tones de massa total.

Els paràmetres estructurals son:

- Secció de referència per al càlcul de la resistència aerodinàmica: té una secció circular amb un diàmetre de 3.81m.
- Àrea de sortida de la tovera: nou paràmetre (definit per l'apartat 4) que implica una penalització en la massa estructural:

$$\frac{A_e}{A_t} = 27$$

$$\Delta M_{st} = m_0 \frac{\Delta A_e}{A_t} 10^{-3} = 322 \text{ tones}$$

La pressió a la cambra de combustió del *Atlas V* és de $p_c \approx 200atm$.

3 Throat area, mass flow and burning time

En primer lloc es computa una taula *Mach-MFP* amb l'Eq. 6.

$$MFP(M, \gamma) = \sqrt{\gamma} \frac{M}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} \quad (6)$$

Donat $\frac{A_e}{A_t} = 30$ i calculat el $MFP(M_t = 1)$, es pot trobar el $MFP(M_e)$ (Eq. 7) i M_e utilitzant la taula *Mach-MFP*, i la p_e (Eq. 8). Aquest procediment és necessari per conèixer les condicions dins la tovera i saber si el flux s'ha després. En cas afirmatiu, es considera que $p'_e = 0.4p_a$ i es calcula M'_e (Eq. 9), $MFP(M'_e)$ (Eq. 6) i amb la taula *Mach-MFP* es coneix l'àrea efectiva $\frac{A'_e}{A_t} = 30$.

$$\frac{A_e}{A_t} = \frac{MFP(M_t)}{MFP(M_e)} \quad (7)$$

$$p_e = \frac{p_c}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \quad (8)$$

$$M_e = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_c}{p_e}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} \quad (9)$$

Aquesta comprovació del estat del flux assegura el càlcul del coeficient d'empenyiment inicial C_{F0} :

$$C_F = (C_F)_V - \frac{p_a A_e}{p_c A_t} \quad (10)$$

on

$$(C_F)_V = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{\gamma M_e + \frac{1}{M_e}}{\sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}} \quad (11)$$

L'empenyiment inicial serà igual a pes del coet multiplicat per un factor (Eq. 12). Aquest factor s'ha escollit suposant que l'empenyiment inicial és un 10% més gran que el pes.

$$F_0 = \left(1 + \frac{factor}{100}\right) g_0 m_{0,rocket} = 354.5t \quad (12)$$

L'àrea de la gola de la tovera i el flux màssic es poden calcular a partir de les Eq. 13 i 14, respectivament. Els valors calculats són de $A_t = 0.103m^2$ i $\dot{m} = 1341kg/s$.

$$F = p_c A_t C_F \quad (13)$$

$$\dot{m} = \frac{p_c A_t}{\sqrt{RT_c}} MFP(M_t = 1) \quad (14)$$

Per últim, sota les condicions de $V_0 = 0m/s$ i $h_0 = 0m$, es determina el temps d'encesa:

$$a(= constant) = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dh}{dt} \Rightarrow h(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + h_0 = \frac{1}{2}at^2 \quad (15)$$

$$t = +\sqrt{\frac{2h}{a}} \rightarrow t_b = t(h = 400 \times 10^3 m) = 188.33s \quad (16)$$

4 Rocket performance

La equació que regeix de la dinàmica del coet es:

$$F - W - D = m(t) \frac{dV}{dt} \quad (17)$$

Les Eq. 13, 10 i 11 faciliten el empenyiment. El pes del coet és:

$$W = g(h)m(t) \quad (18)$$

on

$$\frac{g_0}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2} \quad (19)$$

$$m(t) = m_{0R} - \dot{m}t \quad (20)$$

La resistència aerodinàmica es computa segons:

$$D = \frac{1}{2} \rho_a S_{ref} C_D V^2 \quad (21)$$

on la densitat $\rho_a = p_a^{1/\gamma}/R$ (gas perfecte), i el coeficient del *drag* és funció del Mach de vol.

Juntant tots els termes s'obté:

$$\frac{p_c A_t C_{FV}(h)}{m(t)} - A_t \frac{A_e}{A_t}(h) \frac{p_a(h)}{m(t)} - \frac{1}{2} S_{ref} \frac{C_D(V(t), h)}{R(h)} \frac{p_a(h)^{1/\gamma(h)}}{m(t)} V(t)^2 - g(h) = \frac{dV(t)}{dt} \quad (22)$$

Les variables que canvien de manera continua amb el temps (o amb la altitud, que es relaciona amb el temps segons l'Eq. 15 són: $m(t)$, $p_a(h)$ i $g(h)$. Les altres variables són discretes, i es poden considerar com a constants en un interval d'altitud determinat.

El coeficient de resistència aerodinàmica es pot considerar com a constant i utilitzant el Mach del instant anterior per calcular-lo. L'apartat considera el mateix amb el terme de la velocitat al quadrat, resolent la equació dinàmica de manera iterativa. En canvi,

en l'apartat 4.1 es resol analíticament la equació diferencial en qüestió.

4.1 Analytic computation

La EDO 22 es pot simplificar com:

$$V'(t) = f_1(t)V(t)^2 + f_2(t) \quad (23)$$

Aquesta EDO es pot resoldre segons la EDO de Riccati, la qual planteja 3 canvis de variable:

$$W(t) = f_1(t)V(t) \quad (24)$$

$$\frac{U'(t)}{U(t)} = -W(t) \quad (25)$$

$$Z(t) = U'(t) \quad (26)$$

Operant a través dels 3 canvis, la equació 23 resulta en una EDO lineal:

$$Z'(t) - \frac{f_1'(t)}{f_1(t)}Z(t) = -f_1(t)f_2(t) \quad (27)$$

I la seva solució és:

$$Z(t) = e^{\int \frac{f_1'(t)}{f_1(t)} dt} \int -f_1(t)f_2(t)e^{-\int \frac{f_1'(t)}{f_1(t)} dt} dt \quad (28)$$

$$U(t) = \int Z(t) dt \quad (29)$$

Finalment, el impuls queda aïllat de la següent manera:

$$V(t) = \frac{-1}{f_1(t)} \frac{Z(t)}{U(t)} \quad (30)$$

Tots aquests passos resolts en el cas de l'Eq. 22 queden com:

$$f_1(t) = \frac{p_c A_t C_{FV}(h)}{m(t)} - A_t \frac{A_e}{A_t}(h) \frac{p_a(h)}{m(t)} - g(h) \quad (31)$$

$$Z(t) = \text{sign}[f_1(t)] \text{abs}[f_1(t)] \frac{-g_0}{2} \sqrt{\frac{2R_T}{a}} \left[\text{atan}\left(\sqrt{\frac{a}{2R_T}} t\right) + \frac{\sqrt{\frac{a}{2R_T}} t}{1 + \frac{a}{2R_T} t^2} \right] \quad (32)$$

on *sign* es la funció signe i *abs* el valor absolut. Amb aquesta darrera expressió calculada analíticament, el matlab calcula la integral 29. Tot evaluat en l'instant de temps escollit proporciona l'impuls ΔV .

No obstant, aquest mètode presenta errors quan es passa per un canvi de capa. En altres paraules, la no continuïtat en els paràmetres atmosfèrics fan que $Z(t) = -\infty$.

Una manera de resoldre aquestes discontinuïtats és utilitzant una *window*, que consisteix en suavitzar els salts de continuïtat. S'ha optat per una *window* sinussoidal. Un exemple és la Fig. 3 on es suavitza el salts de temperatura entre capes de la Taula 1. No obstant, això implica afegir varies funcions sinussoidals en la EDO 22, i la resolució analítica ja no es pot fer.

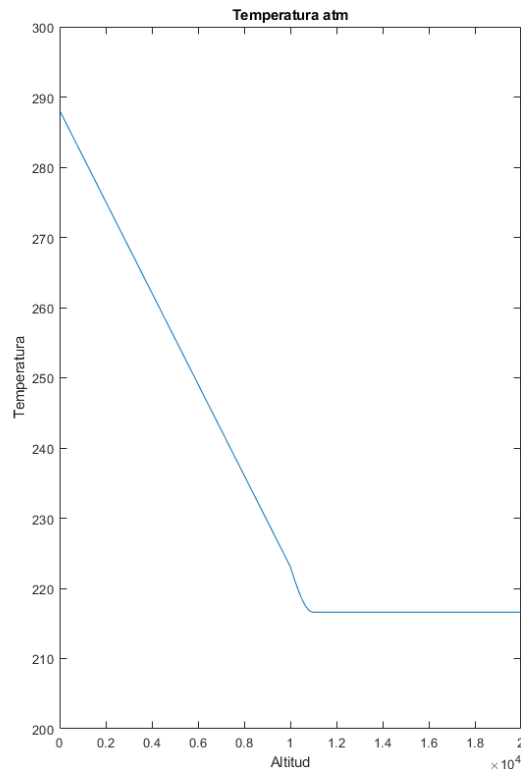


FIGURA 1: Finestra.

4.2 Iterative computation

Aquest mètode pren el terme de la velocitat al quadrat com una constant i l'avalua en la velocitat de l'instant anterior.

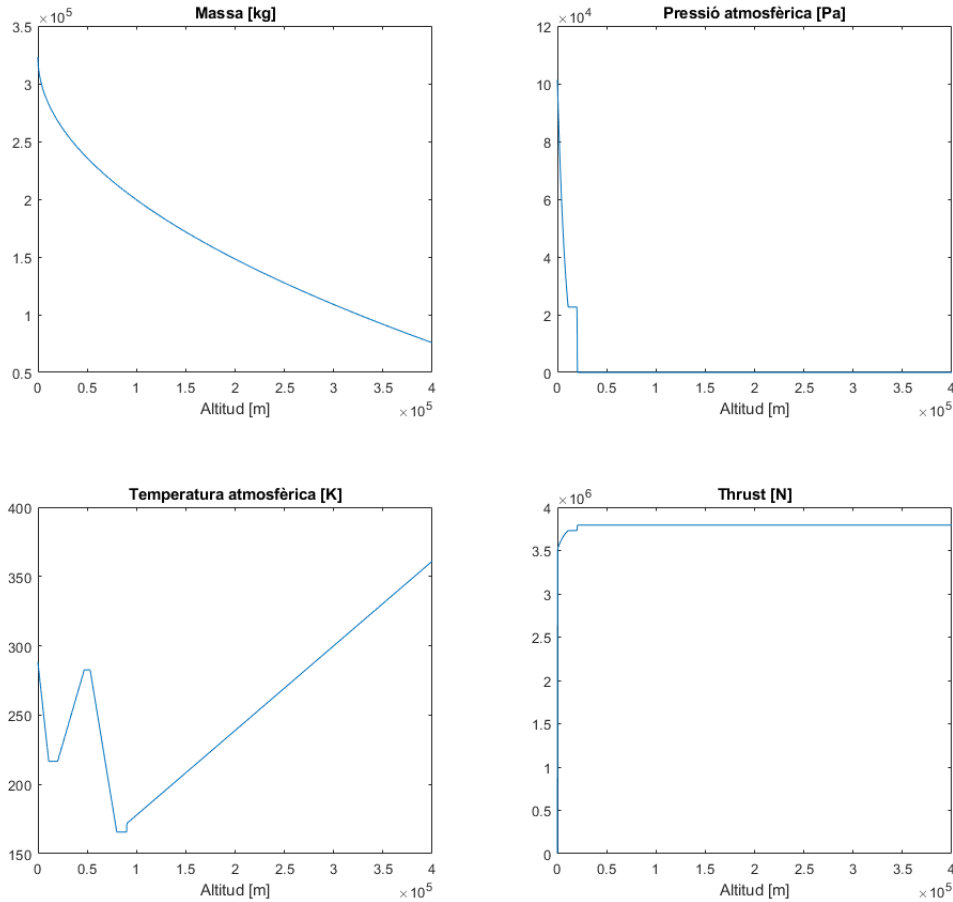


FIGURA 2: Resultats.

En aquest cas segueixen apareixen moltes discontinuïtats en el impuls i en el Mach fruit de com esta modelada la atmòsfera. No obstant, segueix havent-t'hi el mateix inconvenient: les integrals les resol el matlab i si s'afegeix les correccions de *window* s'obté $V(t) = -\infty$. De fet, en algunes caigudes brusques del impuls s'ha hagut de negligir el terme de la resistència aerodinàmica per poder obtindre resultats.

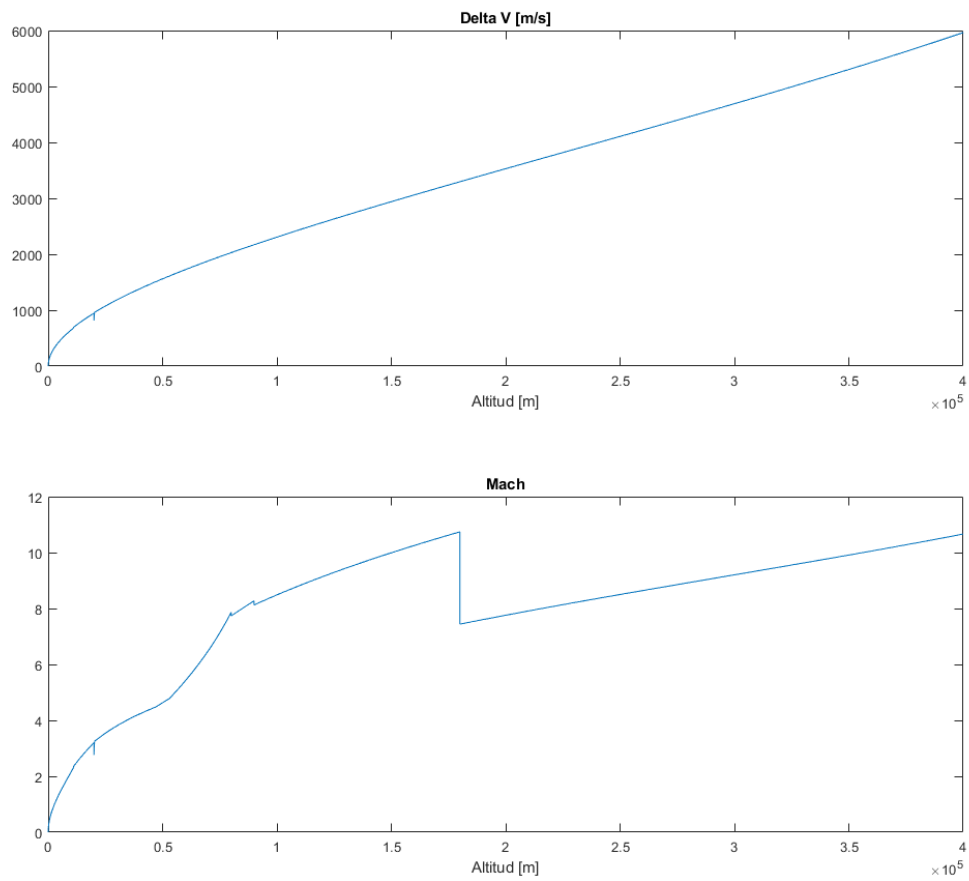


FIGURA 3: Resultats.

Universitat Politècnica de Catalunya

Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa
(ESEIAAT)



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Escola Superior d'Enginyeries Industrial,
Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

Assignatura : Propulsió

Estudi propulsiu del llançament de la primera
etapa del Saturn V

Grup 9



RA, GM i SP



Juny de 2021, Terrassa

Resum

En aquest treball s'han realitzat les següents tasques:

- Determinació dels paràmetres termodinàmics inicials per a la posterior computació, usant eines proporcionades per la NASA.
- Determinació del flux màssic i del temps de combustió del coet, així com la definició del seu ascens vertical i l'anàlisi de diverses gràfiques obtingudes en funció dels seus paràmetres.
- Redisseny de la tovera del coet, per tal de buscar una Area Expansion Ratio òptima per obtenir una major alçada i una velocitat final màxima.

Tot això amb l'ajuda de programació i computació del MATLAB.

Índex

1	Introducció	3
1.1	Objectiu	3
2	Determinació dels paràmetres termodinàmics del coet	4
3	Determinació del flux màssic i el temps de combustió	5
3.1	Ascens Vertical	5
4	Redisseny de la tovera	11
5	Conclusions	14
6	Annex A: Codi Matlab utilitzat	15

1 Introducció

Des que l'èsser humà té consciència, ha posat la mirada a les estrelles i la necessitat i el desig d'arribar més enllà i descobrir quin paper hi té en aquest món, ha ocupat la ment de grans filòsofs científics i escriptors al llarg de la història.

La tecnologia i el coneixement científic avança a passos agegantats i ningú al segle XIX s'hauria pogut arribar a imaginar que la famosa obra *De la Terra a la Lluna* de l'autor francès Julio Verne es faria realitat al següent segle.

Als anys 60, la coeteria va experimentar un desenvolupament sense precedents degut a la denominada Carrera Espacial, que va enfrontar a dues superpotències com la URSS i USA. Genis de la ciència i tecnologia com Wegner Von Braun o Serguei Koroliov van presentar numerosos avenços en aquesta àrea. De tots els coets que es van desenvolupar n'hi va haver un que va deixar reduïts, en termes de dimensions i empenta, els altres coets que fins el moment havien estat llançats amb èxit; el Saturn V.

El Saturn V va ser un coet d'un sol ús, de múltiples fases i de combustible líquid usat en els programes *Apollo* i *Skylab* de la NASA. El seu disseny va estar a càrrec de Wernher von Braun al Marshall Space Flight Center. La principal càrrega per a aquests coets van ser les naus *Apollo* que van portar als astronautes de la NASA a la Lluna.

En els seus vols, el Saturn V passava per tres fases: S-IC, la primera fase, S-II, la segona, i S-IVB com última fase. En les tres s'utilitzava oxigen líquid (LOX) com a oxidant. En la primera fase es feia servir RP-1 (petroli refinat) com a combustible, mentre que les altres dues fases usaven hidrogen líquid (LH2). En una missió, de mitjana, el coet funcionava durant uns 20 minuts.

1.1 Objectiu

L'objectiu principal d'aquest treball és estudiar els sistemes de propulsió del Saturn V i les seves característiques, així com els requisits del coet en el desenvolupament d'una missió espacial d'enlairament i estacionament orbital a l'estratosfera terrestre.

En el cas que ens ocupa, s'ha escollit la primera etapa del Saturn V propulsada amb oxigen líquid (LOX) com oxidant i RP-1 com combustible, amb una pressió a la cambra de combustió de 7MPa. S'ha decidit que la trajectòria de la missió sigui ascenç vertical des del nivell del mar fins a una altura aproximada de 100 km.

Pel que fa a la estructura, s'ha decidit que la massa estructura i el payload suposin un 10% de la massa total del coet (2970 tones). El payload del Saturn V és de 140 tones, per tant, la massa estructural representa 157 tones.

2 Determinació dels paràmetres termodinàmics del coet

En aquest apartat, s'han determinat una sèrie de paràmetres termoquímics necessaris per a l'estudi de la propulsió en el llançament vertical. Aquests paràmetres són: la temperatura a la cambra de combustió (T_c), la massa molecular del gas (M) assumint composició congelada, i el coeficient adiabàtic (γ).

Per tal de realitzar l'estudi dels paràmetres termoquímics del nostre cohet, s'ha utilitzat el software CEA desenvolupat per la NASA. Els paràmetres d'entrada han estat:

- La pressió atmosfèrica a nivell del mar.
- L'oxidant i el combustible que empra el cohet. Com s'ha comentat abans, el Saturn V utilitza oxigen líquid (LOX) com oxidant i RP-1 com combustible.
- La pressió de cambra. En el nostre cas, $P_c = 7MPa$.
- Es va considerar composició congelada.

Els resultats obtinguts van ser:

T_c	M	γ_T	γ_E
3685.68	25.728	1.2063	1.2316

Un cop obtinguts aquests paràmetres es pot passar al següent apartat, la determinació del temps de combustió així com el flux màssic.

Evidentment, el punt de partida seran aquests diferents paràmetres obtinguts amb el software mencionat.

3 Determinació del flux màssic i el temps de combustió

En aquesta secció, com ja s'ha introduït, s'han determinat el flux màssic \dot{m} i el temps de cremat necessari t_b .

Per obtenir aquests dos resultats, s'ha considerat una ràtio d'àrees $\frac{A_e}{A_t} = 30$, i una àrea a la gola A_t necessària per produir un nivell d'empenta inicial d'un 10% a un 30% superior al pes inicial. S'ha desenvolupat també un codi de matlab per poder realitzar els càlculs correctament i computar els valors necessaris.

Es comença determinant varis paràmetres com la massa total del combustible, la massa total de la carrega i l'estructura, així com altres valors necessaris com l'alçada a nivell del mar i la temperatura i la pressió en aquest punt.

Després de determinar varis valors concrets, es pot ja calcular el flux màssic. Cal tenir en compte que la següent expressió ens dóna aquest valor per cada un dels motors del coet:

$$MassFlow = \frac{P_c \cdot 10^6 \cdot A_t}{c} \quad (1)$$

On els diversos paràmetres son:

$$P_c = 7MPa \quad (2)$$

$$A_t = \frac{TotalMass \cdot g_0 \cdot \frac{100+InitialThrust}{100}}{P_c \cdot 10^6 \cdot UeDivc + \frac{P_e}{P_c} \cdot Aedivat - \frac{P_a}{P_c} \cdot A_t} \quad (3)$$

$$c = \frac{U_e}{Uedivc} \quad (4)$$

Dins aquestes darreres equacions hi ha més paràmetres, també computats en MATLAB. Varies de les nomenclatures son força estranyes, derivades de la programació, que ha conduït aquestes nomenacions de variables.

I un cop determinat el MassFlow, es pot passar al càlcul del temps de combustió, que serà el següent:

$$BurningTime = \frac{FuelMass}{MassFlow \cdot N_{engines}} \quad (5)$$

Els resultats obtinguts son:

Taula 1: Valors finals del MassFlow i el BurningTime.

Mass Flow (Per motor)	2470.0215 Kg/s
Total Mass Flow	12350.1073 Kg/s
Total Mass Flow (en tones)	12.35 Tons/s
Burning Time	167.6099 s

3.1 Ascens Vertical

El procediment en el cas de l'ascens vertical serà força similar. Es definiran varis paràmetres indispensables per a la computació i es passarà a realitzar el codi de MATLAB necessari.

En aquest cas, després de varies iteracions i comprovacions i varis condicionants computats s'obtenen els següents resultats importants:

Taula 2: Ascens vertical, valors significatius.

MECO Velocity	4705.2693 m/s
MECO Altitude	201.1498 Km
Altitud Màxima	1670.3887 Km

Un cop obtinguts aquests resultats, s'obtenen també les següents gràfiques:

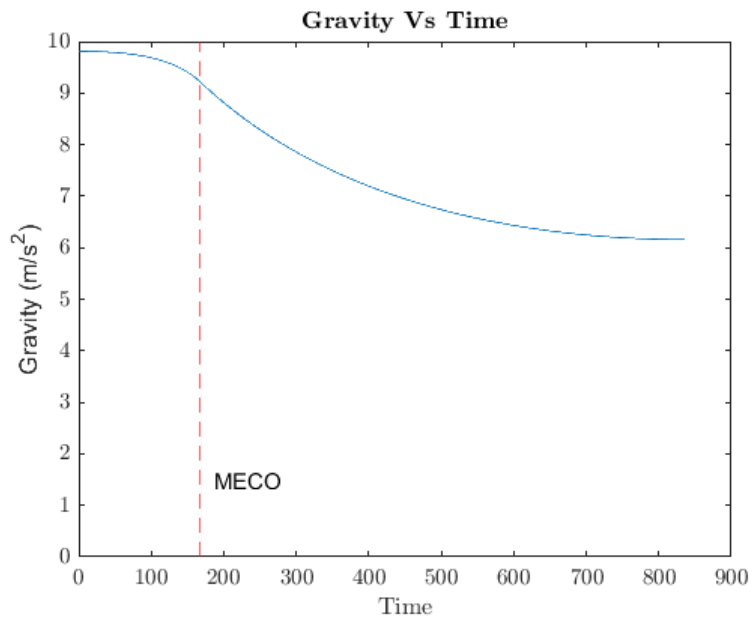


Figura 1: Gravetat en funció del Temps

Es pot observar que, a mesura que el coet es va alçant, l'atracció de la terra sobre aquest és menor, per tant, a més temps menor gravetat.

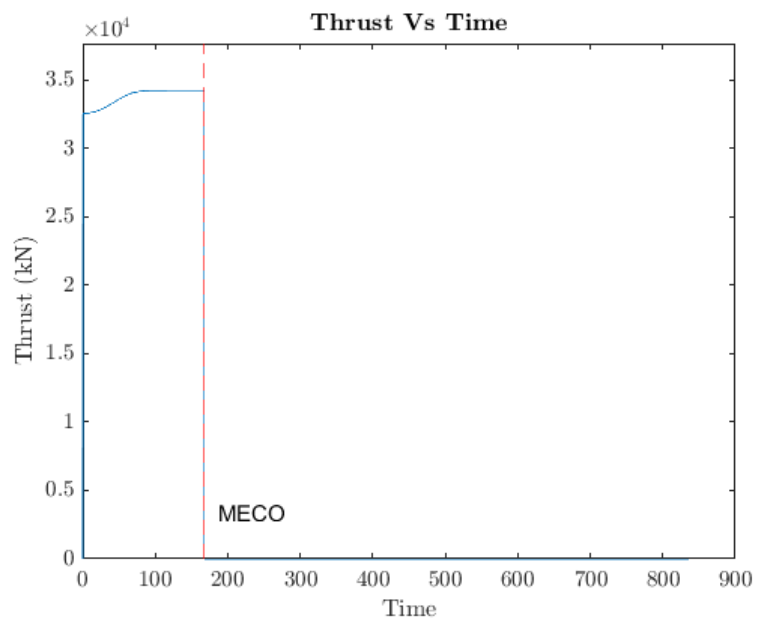


Figura 2: Empenta en funció del Temps

Es pot observar que en el moment inicial l'empenta exercida és tota de manera pràcticament instantània i, un cop passen uns segons, tot i que el valor total augmenta, també s'estabilitza.

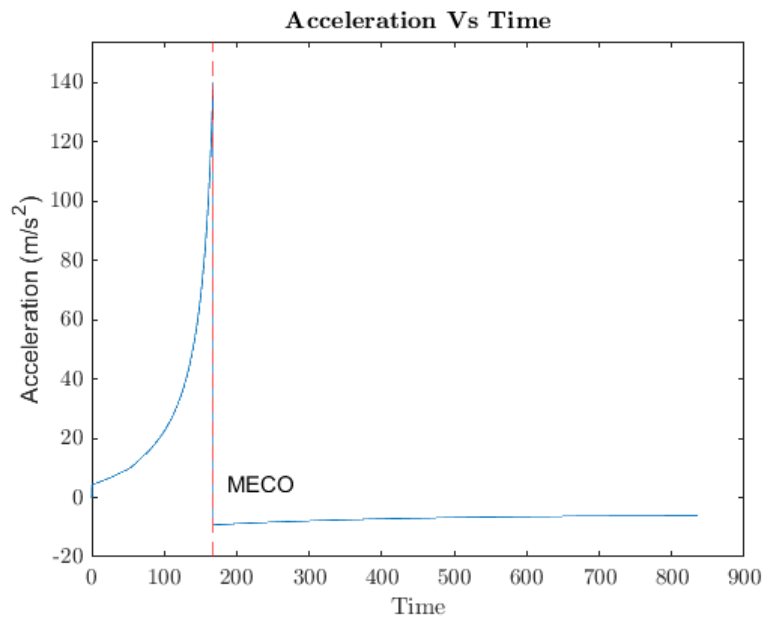


Figura 3: Acceleració en funció del Temps

L'acceleració en els primers instants augmenta d'una manera exponencial fins arribar al MECO, un cop aquí disminueix dràstica i instantàniament, fins arribar de cop als -10 m/s^2 aproximadament.

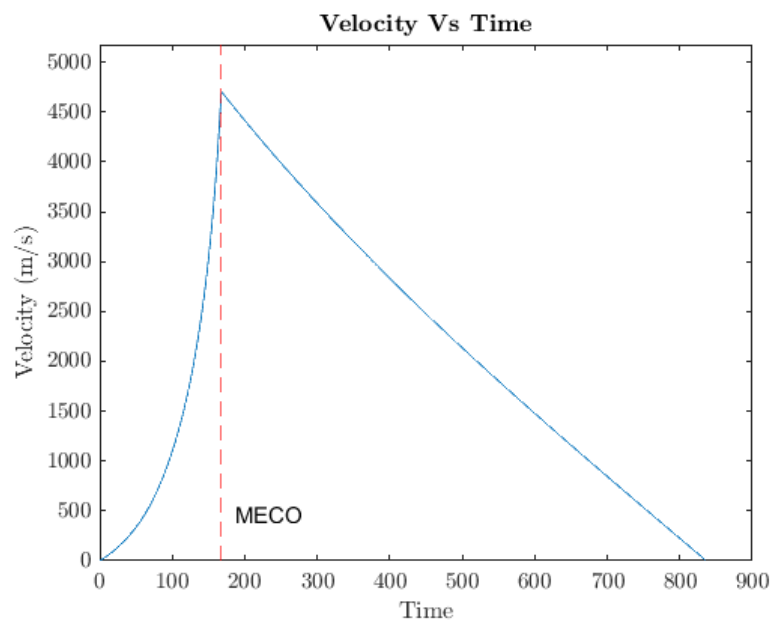


Figura 4: Velocitat en funció del Temps

Un cas semblant passa amb la velocitat, tot i que aquesta no disminueix d'una manera instantània a l'arribar al MECO, sinó que disminueix de manera quasi lineal.

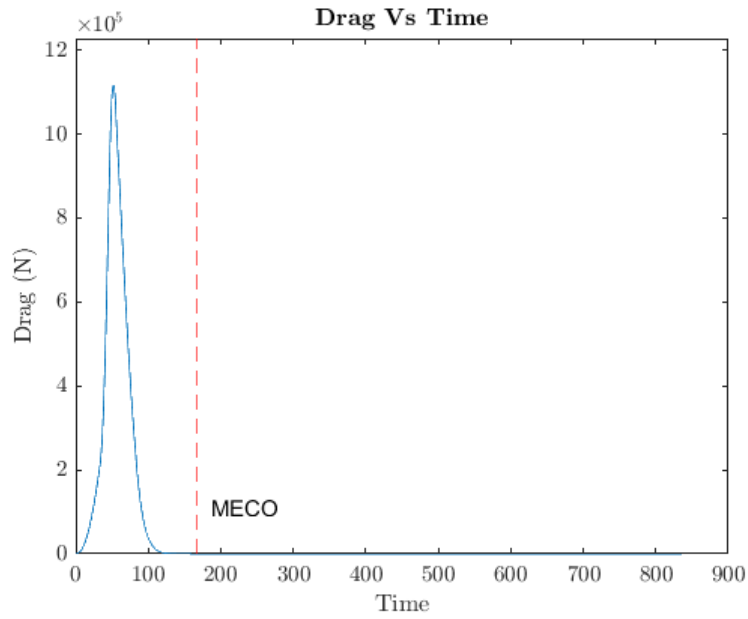


Figura 5: Drag en funció del Temps

Es pot apreciar que el drag en els primers instants augmenta d'una manera brutal arribant al màxim aproximadament en els 50s, i de mateixa manera disminueix fins aproximadament el punt de Main Engine Cut Off. En aquells moments es manté a 0 fins al final.

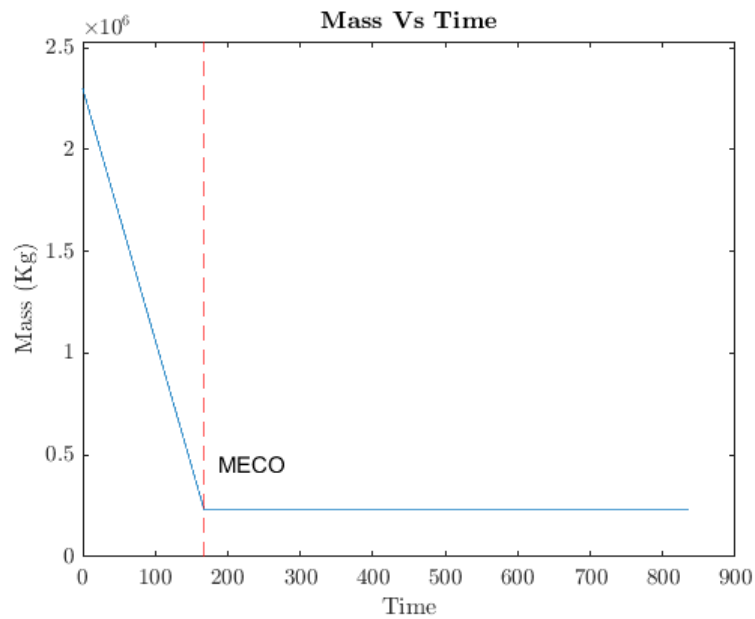


Figura 6: Massa del coet en funció del Temps

La massa, com és lògic, va disminuint de manera lineal a mesura que es va consumint el combustible, fins a arribar al MECO on s'estabilitza i queda constant a uns $0.25 \cdot 10^6$ Kg aproximadament.

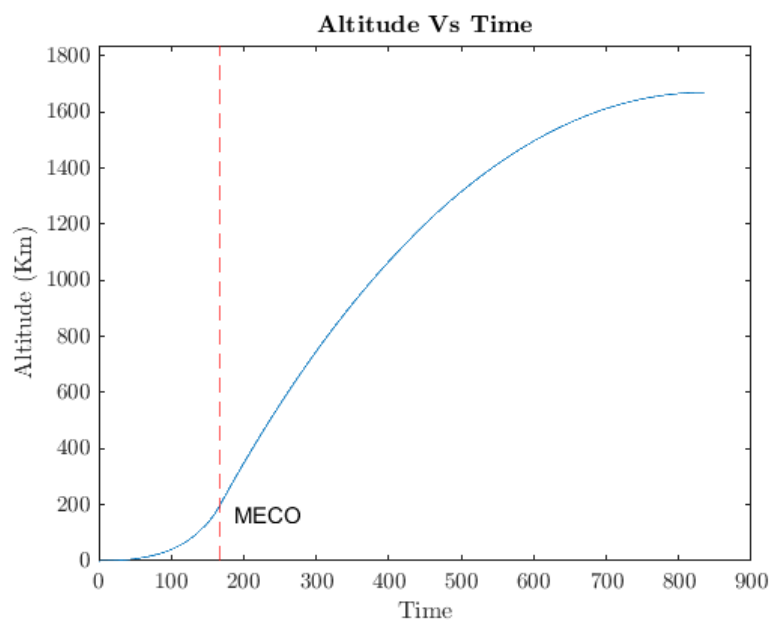


Figura 7: Altitud en funció del Temps

En aquesta gràfica es pot observar d'una manera simple la rapidesa amb la que el coet va agafant altitud, arribant al punt màxim en uns 800 segons aproximadament, uns 13 minuts.

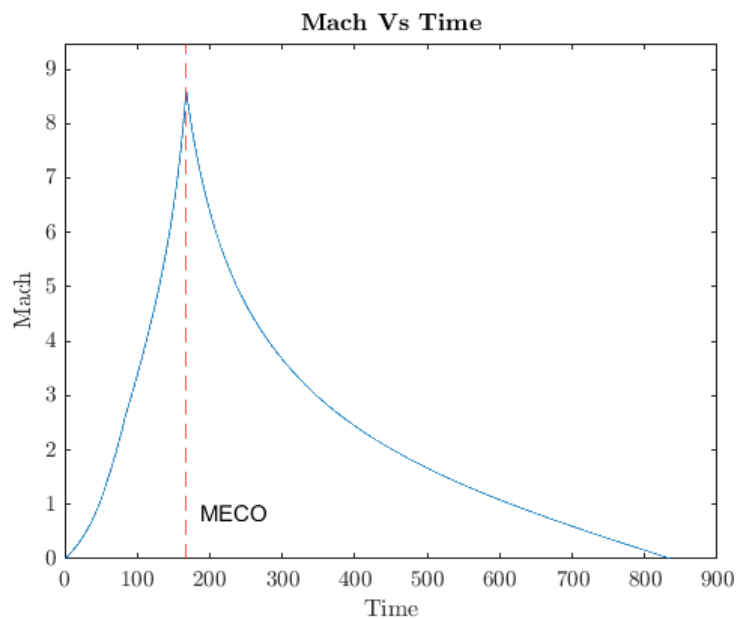


Figura 8: Mach en funció del Temps

Es pot apreciar que el Mach, és a dir, la velocitat relativa a la que es mou el coet respecte la velocitat del so, augmenta quasi exponencialment fins arribar al MECO, en aquell punt, com és lògic, comença a disminuir.

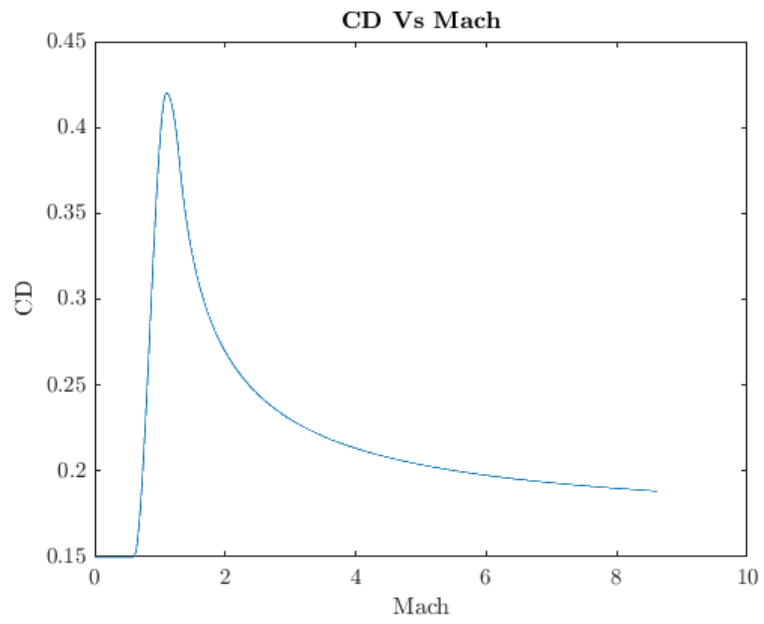


Figura 9: Coeficient de drag en funció del Mach

Es pot apreciar que el punt més crític quant a coeficient de drag és entre 1 Mach i els 2 Mach, trobant-se el màxim aproximadament als 1.5 Mach. A partir d'aquest moment ja només fa que disminuir.

4 Redisseny de la tovera

És en aquest apartat on es desenvoluparà o s'estudiarà un redisseny de la tovera per tal d'optimitzar el procés anterior. Per tant, un cop realitzat aquest es recomputarà i es tornaran a obtenir els diversos resultats..

Es torna a seguir un procés d'iteracions, comprovacions i condicionants i s'obtenen les següents gràfiques finals, un cop ja amb la tovera optimitzada:

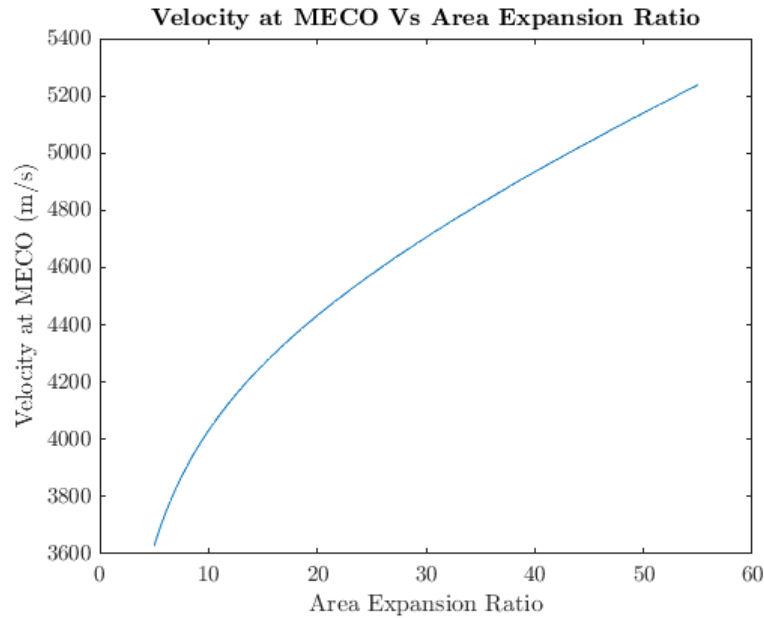


Figura 10: Velocitat al MECO en funció de l'Àrea Expansion Ratio

Primera gràfica on s'observa una comparativa entre una de les característiques i l'àrea expansion ratio (AER). Es pot observar que a més AER, més velocitat hi haurà un cop arribat al MECO.

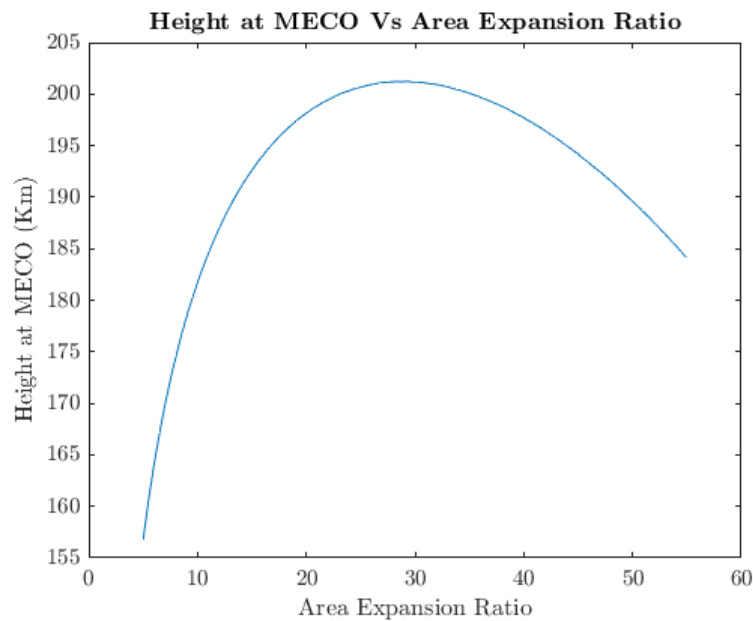


Figura 11: Alçada al MECO en funció de l'Àrea Expansion Ratio

En aquesta gràfica es pot observar que no per tenir més AER es tindrà una alçada major en el moment en que s'arriba al MECO. De fet la alçada màxima al MECO serà aproximadament amb un àrea expansion ratio de 25.

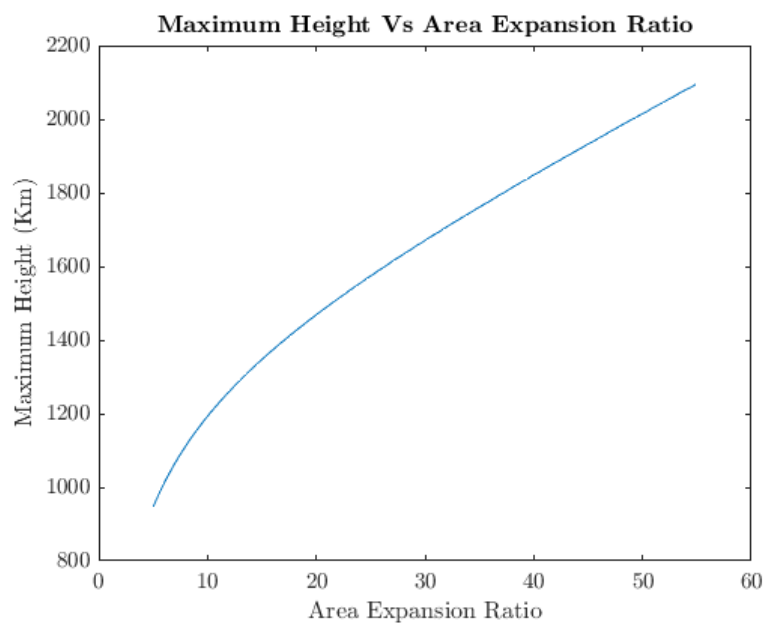


Figura 12: Altitud màxima en funció de l'Area Expansion Ratio

La màxima alçada total sí que incrementa en conjunció amb l'AER. A més AER, més alçada en quilòmetres.

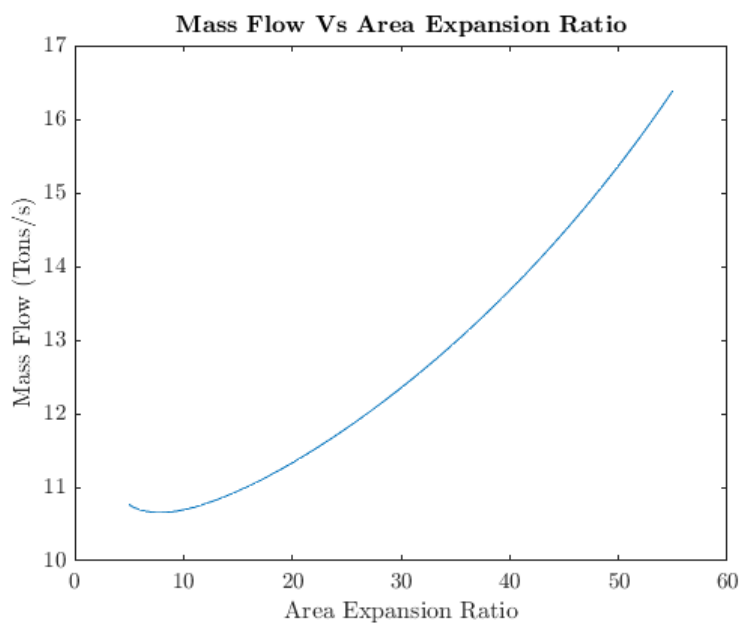


Figura 13: Fluxe màssic en funció de l'Area Expansion Ratio

Es pot veure que, de manera similar a la gràfica anterior, a més àrea expansion ratio, major serà el flux màssic. Tot i que la variació d'aquest no serà lineal, sinó exponencial. L'increment entre els 0 i els 20 d'AER no és el mateix increment que es té a posteriori.

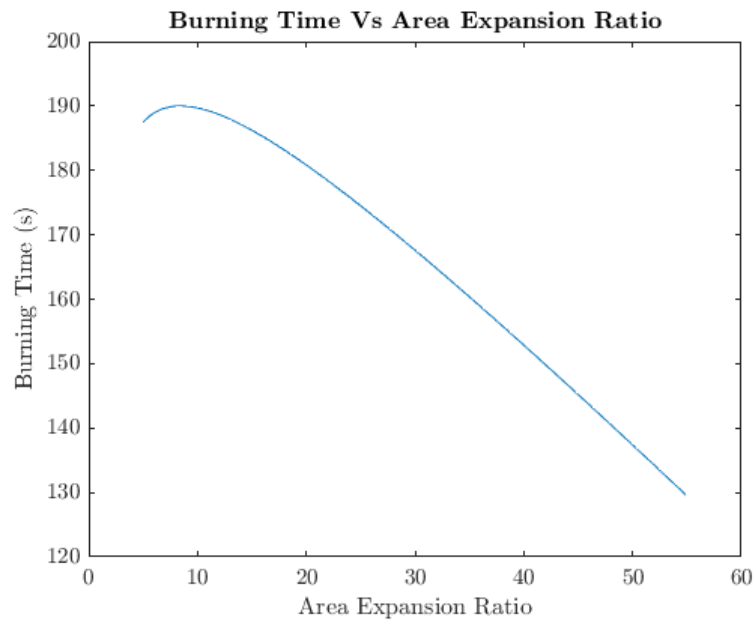


Figura 14: Temps de combustió en funció de l'Area Expansion Ratio

D'aquesta gràfica es pot veure clarament que, a més AER, menys temps de combustió, a no ser que aquest AER sigui molt petit (inferior a 5). A partir dels 5 aproximadament, disminueix de manera lineal a un ritme elevat.

Un cop analitzades les varies gràfiques obtingudes al realitzar aquests ajustos de redisseny es pot extreure que, tot i que l'alçada al MECO sigui menor, el que realment és interessant és l'alçada màxima final i la velocitat màxima, Per tant, el que es buscarà és un area expansion ratio major, per obtenir aquests millors resultats. En el cas estudiat, aquesta seria de **55**.

5 Conclusions

Un cop realitzat el treball assignat, es pot recapitular i veure que realment s'han pogut observar i interioritzar els diversos conceptes treballats a la part de teoria i, d'aquesta manera, comprendre molt més i d'una manera més pràctica, els coneixements tant conceptuals ja explicats.

En el primer apartat s'ha pogut utilitzar una eina de la pròpia NASA per determinar paràmetres necessaris per al posterior desenvolupament, obtenint valors apropiats i dins els resultats desitjats.

Posteriorment, en la determinació del flux màssic i el temps de combustió, els varis resultats obtinguts han sigut satisfactoris. Un cop obtinguts aquests paràmetres s'ha computat l'ascens vertical, on els resultats obtinguts també han estat realment satisfactoris, així com les gràfiques extrems de les computacions, amb resultats lògics i coherents, i de fàcil interpretació.

Finalment, s'ha redissenyat la tovera per obtenir-la d'una manera òptima per la màxima velocitat final i alçada obtenint, una vegada més, unes gràfiques totalment coherents amb el resultat buscat. Un anàlisi d'aquestes condueix, finalment, a un resultat determinat.

6 Annex A: Codi Matlab utilitzat

```

1 %%Authors:
2
3 %%
4 clc
5 clear
6 close all
7
8
9 %% Given Values
10 Ae_Div_At = 30;           %Area Ratio
11
12
13 %% Chosen Values
14 Pc = 7;                  %MPa
15 TotalMass = 2300000;    %Kg
16 St_Pl = 10;             %Percentage of structural and payload from the total mass
17 Initial_Thrust = 20;    %Percentage of thrust greater than the initial weight
18 N_Engines = 5;          %Number of Engines
19 Sref = pi/4*10.1^2;     %Rocket Sectional Area
20
21
22 %% CEA Values
23 Tc = 3685.68;           %K
24 MMolecular = 25.728;
25 GammaT = 1.2063;
26 GammaE = 1.2316;
27
28
29 %% Mass Flow & Burning Time
30 disp('Computing Mass Flow & Burning Time...')
31
32 FuelMass = TotalMass*((100-St_Pl)/100);
33 St_Pl_Mass = TotalMass*St_Pl/100;
34
35 Sea_Level_Height = 0;
36 %m
37 SeaLevel_Temperature = 15.04 - 0.00649*Sea_Level_Height;
38 %Celsius
39 Sea_Level_Pressure = (101.29 * ((SeaLevel_Temperature + 273.1)/288.08).^5.256)/1000;
40 %MPa
41 Pa = Sea_Level_Pressure;
42
43 Theta = 1e-5;
44 Me = 0.5;
45
46 while (Ae_Div_At - (2/(GammaE+1))^((GammaE+1)/(2*(GammaE-1)))*1/Me*(1+(GammaE-1)/2*Me
47 ^2)^((GammaE+1)/(2*(GammaE-1)))>Theta)
48 Me = Me + Theta;
49 end
50
51 Pe = Pc*(1+(GammaE-1)/2*Me^2)^(-GammaE/(GammaE-1));
52
53 ue_div_c = GammaE*(2/(GammaE+1))^((GammaE+1)/(2*(GammaE-1)))*Me/(sqrt(1+(GammaE-1)/2*
54 Me^2));
55
56 g0 = 9.81;
57
58 At = (TotalMass*g0*(100+Initial_Thrust)/100/N_Engines)/(Pc*10^6*(ue_div_c+Pe/Pc*
59 Ae_Div_At-Pa/Pc*Ae_Div_At));
60
61 Ae = Ae_Div_At*At;
62
63 CF = (TotalMass*g0*(100+Initial_Thrust)/100/N_Engines)/(Pc*10^6*At);
64
65 Te = Tc/(1+(GammaE-1)/2*Me^2);
66
67 Ue = Me*sqrt(GammaE*287*Te);
68
69 c = Ue/ue_div_c;
70
71 MassFlow = Pc*10^6*At/c; %Each Engine
72
73 BurningTime = FuelMass/(MassFlow*N_Engines);

```

```

68 disp(' ')
69 Missatge = ['Mass Flow (Per Engine) = ', num2str(MassFlow), ' Kg/s'];
70 disp(Missatge)
71 Missatge = ['Total Mass Flow = ', num2str(MassFlow*N_Engines), ' Kg/s ( ', num2str(
72     MassFlow*N_Engines/1000), ' Tons/s)'];
73 disp(Missatge)
74 Missatge = ['Burning Time = ', num2str(BurningTime), ' s'];
75 disp(Missatge)
76 disp(' ')
77 disp(' ')
78
79
80
81 %% Vertical Ascent
82 disp('Computing Vertical Ascent...')
83
84 DeltaT = 0.001;
85 i=1;
86 Vel = 1;
87
88 while(Vel>0)
89
90     if(i==1)
91         Time(i) = 0;
92         Gravity(i) = g0/(1+0/6371000)^2;
93         Thrust(i) = 0;
94         Acceleration(i) = 0;
95         Velocity(i) = 0;
96         Drag(i) = 0;
97         Mass(i) = TotalMass;
98         Altitude(i) = 0;
99         Temp(i) = 15.04 - 0.00649*Altitude(i);
100        Pressure(i) = (101.29 * ((Temp(i) + 273.1)/288.08).^5.256);
101        rho(i) = Pressure(i)/(0.2869*(Temp(i)+273.1));
102        M(i) = Velocity(i)/(sqrt(1.4*287*(Temp(i) + 273.1)));
103        CD(i) = 0.15;
104
105        i = i + 1;
106        elseif(Time(i-1)<BurningTime)
107
108            if(Altitude(i-1)<11000)
109                Temp(i) = 15.04 - 0.00649*Altitude(i-1);
110                Pressure(i) = (101.29 * ((Temp(i) + 273.1)/288.08).^5.256);
111                rho(i) = Pressure(i)/(0.2869*(Temp(i)+273.1));
112
113            elseif(11000<Altitude(i-1))&&(Altitude(i-1)<25000)
114                Temp(i) = -56.46;
115                Pressure(i) = 22.65*exp(1.73-0.000157*Altitude(i-1));
116                rho(i) = Pressure(i)/(0.2869*(Temp(i)+273.1));
117
118            elseif(Altitude(i-1)>25000)
119                Temp(i) = -131.21 + 0.00299*Altitude(i-1);
120                Pressure(i) = 2.488 * ((Temp(i) + 273.1)/216.6)^(-11.388);
121                rho(i) = Pressure(i)/(0.2869*(Temp(i)+273.1));
122
123            end
124
125            Time(i) = Time(i-1) + DeltaT;
126            Gravity(i) = g0/(1+Altitude(i-1)/6371000)^2;
127            Thrust(i) = MassFlow*5*Ue+Ae*(Pe*10^6-Pressure(i)*10^3);
128            Acceleration(i) = (Thrust(i) - Mass(i-1)*Gravity(i) - Drag(i-1))/Mass(i-1);
129            Velocity(i) = Velocity(i-1) + Acceleration(i)*DeltaT;
130            Drag(i) = 0.5*rho(i)*(Velocity(i))^2*Sref*CD(i-1);
131            Mass(i) = Mass(i-1) - MassFlow*5*DeltaT;
132            Altitude(i) = Altitude(i-1) + Velocity(i)*DeltaT;
133            M(i) = Velocity(i)/(sqrt(1.4*287*(Temp(i) + 273.1)));
134            Vel = Velocity(i);
135            VelocityMECO = Velocity(i);
136            HeightMECO = Altitude(i);
137
138            if(M(i)<=0.6)
139                CD(i) = 0.15;

```



```

143
144
145 elseif(0.6<M(i))&&(M(i)<=1.1)
146 CD(i) = -4.32*(M(i))^3 + 11.016*(M(i))^2 - 8.5536*M(i) + 2.24952;
147
148
149 elseif(1.1<M(i))&&(M(i)<=1.3)
150 CD(i) = -(M(i))^2 + 2.2*M(i) - 0.79;
151
152
153 elseif(1.3<M(i))
154 CD(i) = 0.167669 + 0.17636/(sqrt((M(i))^2-1));
155
156 end
157
158 i = i + 1;
159
160 else
161 while (Velocity(i-1)>0)
162 if(Altitude(i-1)<11000)
163 Temp(i) = 15.04 - 0.00649*Altitude(i-1);
164 Pressure(i) = (101.29 * ((Temp(i) + 273.1)/288.08).^5.256);
165 rho(i) = Pressure(i)/(0.2869*(Temp(i)+273.1));
166
167
168 elseif(11000<Altitude(i-1))&&(Altitude(i-1)<25000)
169 Temp(i) = -56.46;
170 Pressure(i) = 22.65*exp(1.73-0.000157*Altitude(i-1));
171 rho(i) = Pressure(i)/(0.2869*(Temp(i)+273.1));
172
173
174 elseif(Altitude(i-1)>25000)
175 Temp(i) = -131.21 + 0.00299*Altitude(i-1);
176 Pressure(i) = 2.488 * ((Temp(i) + 273.1)/216.6)^(-11.388);
177 rho(i) = Pressure(i)/(0.2869*(Temp(i)+273.1));
178
179
180 end
181
182 Time(i) = Time(i-1) + DeltaT;
183 Gravity(i) = g0/(1+Altitude(i-1)/6371000)^2;
184 Thrust(i) = 0;
185 Acceleration(i) = (Thrust(i) - Mass(i-1)*Gravity(i) - Drag(i-1))/Mass(i-1);
186 Velocity(i) = Velocity(i-1) + Acceleration(i)*DeltaT;
187 Drag(i) = 0.5*rho(i)*(Velocity(i))^2*Sref*CD(i-1);
188 Mass(i) = Mass(i-1);
189 Altitude(i) = Altitude(i-1) + Velocity(i)*DeltaT;
190 M(i) = Velocity(i)/(sqrt(1.4*287*(Temp(i) + 273.1)));
191 Vel = Velocity(i);
192 MaxHeight = Altitude(i);
193
194
195 if(M(i)<=0.6)
196 CD(i) = 0.15;
197
198
199 elseif(0.6<M(i))&&(M(i)<=1.1)
200 CD(i) = -4.32*(M(i))^3 + 11.016*(M(i))^2 - 8.5536*M(i) + 2.24952;
201
202
203 elseif(1.1<M(i))&&(M(i)<=1.3)
204 CD(i) = -(M(i))^2 + 2.2*M(i) - 0.79;
205
206
207 elseif(1.3<M(i))
208 CD(i) = 0.167669 + 0.17636/(sqrt((M(i))^2-1));
209
210 end
211
212 i = i + 1;
213
214 end
215 end
216 end
217
218 %% Graphs

```

```

219 figure(1)
220 plot(Time(:),Gravity(:))
221 title('\bf Gravity Vs Time','Interpreter','latex')
222 set(gca,'TickLabelInterpreter','latex','FontSize',11)
223 xlabel('Time','Interpreter','latex','FontSize',12)
224 ylabel('Gravity (m/s^2)')%, 'Interpreter','latex','FontSize',12)
225 line([BurningTime,BurningTime],[0,10^10],'Color','r','LineStyle','--')
226 ylim([0,10]);
227 text(BurningTime+20,1.5,'MECO','fontsize',11)
228
229 figure(2)
230 plot(Time(:),Thrust(:)/1000)
231 title('\bf Thrust Vs Time','Interpreter','latex')
232 set(gca,'TickLabelInterpreter','latex','FontSize',11)
233 xlabel('Time','Interpreter','latex','FontSize',12)
234 ylabel('Thrust (kN)','Interpreter','latex','FontSize',12)
235 line([BurningTime,BurningTime],[0,10^10],'Color','r','LineStyle','--')
236 ylim([0,max(Thrust(:))/1000+max(Thrust(:))/1000/10]);
237 text(BurningTime+20,min(Thrust(:))/1000+max(Thrust(:))/1000/10,'MECO','fontsize',11)
238
239 figure(3)
240 plot(Time(:),Acceleration(:))
241 title('\bf Acceleration Vs Time','Interpreter','latex')
242 set(gca,'TickLabelInterpreter','latex','FontSize',11)
243 xlabel('Time','Interpreter','latex','FontSize',12)
244 ylabel('Acceleration (m/s^2)')%, 'Interpreter','latex','FontSize',12)
245 line([BurningTime,BurningTime],[-10^10,10^10],'Color','r','LineStyle','--')
246 ylim([-20,max(Acceleration(:))+max(Acceleration(:))/10]);
247 text(BurningTime+20,min(Acceleration(:))+max(Acceleration(:))/10,'MECO','fontsize',11)
248
249 figure(4)
250 plot(Time(:),Velocity(:))
251 title('\bf Velocity Vs Time','Interpreter','latex')
252 set(gca,'TickLabelInterpreter','latex','FontSize',11)
253 xlabel('Time','Interpreter','latex','FontSize',12)
254 ylabel('Velocity (m/s)','Interpreter','latex','FontSize',12)
255 line([BurningTime,BurningTime],[0,10^10],'Color','r','LineStyle','--')
256 ylim([0,max(Velocity(:))+max(Velocity(:))/10]);
257 text(BurningTime+20,min(Velocity(:))+max(Velocity(:))/10,'MECO','fontsize',11)
258
259 figure(5)
260 plot(Time(:),Drag(:))
261 title('\bf Drag Vs Time','Interpreter','latex')
262 set(gca,'TickLabelInterpreter','latex','FontSize',11)
263 xlabel('Time','Interpreter','latex','FontSize',12)
264 ylabel('Drag (N)','Interpreter','latex','FontSize',12)
265 line([BurningTime,BurningTime],[0,10^10],'Color','r','LineStyle','--')
266 ylim([0,max(Drag(:))+max(Drag(:))/10]);
267 text(BurningTime+20,min(Drag(:))+max(Drag(:))/10,'MECO','fontsize',11)
268
269 figure(6)
270 plot(Time(:),Mass(:))
271 title('\bf Mass Vs Time','Interpreter','latex')
272 set(gca,'TickLabelInterpreter','latex','FontSize',11)
273 xlabel('Time','Interpreter','latex','FontSize',12)
274 ylabel('Mass (Kg)','Interpreter','latex','FontSize',12)
275 line([BurningTime,BurningTime],[0,10^10],'Color','r','LineStyle','--')
276 ylim([0,max(Mass(:))+max(Mass(:))/10]);
277 text(BurningTime+20,min(Mass(:))+max(Mass(:))/10,'MECO','fontsize',11)
278
279 figure(7)
280 plot(Time(:),Altitude(:)/1000)
281 title('\bf Altitude Vs Time','Interpreter','latex')
282 set(gca,'TickLabelInterpreter','latex','FontSize',11)
283 xlabel('Time','Interpreter','latex','FontSize',12)
284 ylabel('Altitude (Km)','Interpreter','latex','FontSize',12)
285 line([BurningTime,BurningTime],[0,10^10],'Color','r','LineStyle','--')
286 ylim([0,max(Altitude(:))/1000+max(Altitude(:))/1000/10]);
287 text(BurningTime+20,min(Altitude(:))/1000+max(Altitude(:))/1000/10,'MECO','fontsize',11)
288
289 figure(8)
290 plot(Time(:),M(:))
291 title('\bf Mach Vs Time','Interpreter','latex')
292 set(gca,'TickLabelInterpreter','latex','FontSize',11)
293 xlabel('Time','Interpreter','latex','FontSize',12)

```

```

294 ylabel('Mach','Interpreter','latex','FontSize',12)
295 line([BurningTime,BurningTime],[0,10^10],'Color','r','LineStyle','--')
296 ylim([0,max(M(:))+max(M(:))/10]);
297 text(BurningTime+20,min(M(:))+max(M(:))/10,'MECO','fontsize',11)
298
299 figure(9)
300 plot(M(:),CD(:))
301 title('\bf CD Vs Mach','Interpreter','latex')
302 set(gca,'TickLabelInterpreter','latex','FontSize',11)
303 xlabel('Mach','Interpreter','latex','FontSize',12)
304 ylabel('CD','Interpreter','latex','FontSize',12)
305
306
307 disp(' ')
308 Missatge = ['MECO Velocity = ',num2str(VelocityMECO),' m/s'];
309 disp(Missatge)
310 Missatge = ['MECO Altitude = ',num2str(HeightMECO/1000),' Km'];
311 disp(Missatge)
312 Missatge = ['Max Altitude = ',num2str(MaxHeight/1000),' Km'];
313 disp(Missatge)
314 disp(' ')
315 disp(' ')
316
317
318 %% Area Ratio Resize
319 disp('Resizing Area Ratio... ')
320
321 New_Ae_Div_At = linspace(5,55,100);
322 Epsilon = 0.001;
323
324
325 for e=1:length(New_Ae_Div_At)
326 TotalMass2 = TotalMass + TotalMass*(New_Ae_Div_At(e) - Ae_Div_At)*Epsilon;
327
328 % Mass Flow & Burning Time
329 FuelMass = TotalMass2*((100-St_Pl)/100);
330 St_Pl_Mass = TotalMass2*St_Pl/100;
331
332 Sea_Level_Height = 0;
333 %m
334 SeaLevel_Temperature = 15.04 - 0.00649*Sea_Level_Height;
335 %Celsius
336 Sea_Level_Pressure = (101.29 * ((SeaLevel_Temperature + 273.1)/288.08).^5.256)/1000;
337 %MPa
338 Pa = Sea_Level_Pressure;
339
340 Theta = 1e-5;
341 Me = 0.5;
342
343 while (New_Ae_Div_At(e) - (2/(GammaE+1))^((GammaE+1)/(2*(GammaE-1)))*1/Me*(1+(GammaE
-1)/2*Me^2)^((GammaE+1)/(2*(GammaE-1)))>Theta)
344 Me = Me + Theta;
345 end
346
347 Pe = Pc*(1+(GammaE-1)/2*Me^2)^(-GammaE/(GammaE-1));
348
349 ue_div_c = GammaE*(2/(GammaE+1))^((GammaE+1)/(2*(GammaE-1)))*Me/(sqrt(1+(GammaE-1)/2*
Me^2));
350
351 g0 = 9.81;
352
353 At = (TotalMass2*g0*(100+Initial_Thrust)/100/N_Engines)/(Pc*10^6*(ue_div_c+Pe/Pc*
New_Ae_Div_At(e)-Pa/Pc*New_Ae_Div_At(e)));
354
355 Ae = New_Ae_Div_At(e)*At;
356
357 CF = (TotalMass2*g0*(100+Initial_Thrust)/100/N_Engines)/(Pc*10^6*At);
358
359 Te = Tc/(1+(GammaE-1)/2*Me^2);
360
361 Ue = Me*sqrt(GammaE*287*Te);
362
363 c = Ue/ue_div_c;
364
365 MassFlow = Pc*10^6*At/c; %Each Engine
366
367

```

```

364 BurningTime = FuelMass/(MassFlow*N_Engines);
365
366 MassFlowG(e) = MassFlow*N_Engines;
367 BurningTimeG(e) = BurningTime;
368
369
370 %Vertical Ascent
371 DeltaT = 0.01;
372 i=1;
373 Vel = 1;
374
375 while(Vel>0)
376
377 if(i==1)
378 Time2(i) = 0;
379 Gravity2(i) = g0/(1+0/6371000)^2;
380 Thrust2(i) = 0;
381 Acceleration2(i) = 0;
382 Velocity2(i) = 0;
383 Drag2(i) = 0;
384 Mass2(i) = TotalMass2;
385 Altitude2(i) = 0;
386 Temp2(i) = 15.04 - 0.00649*Altitude2(i);
387 Pressure2(i) = (101.29 * ((Temp2(i) + 273.1)/288.08).^5.256);
388 rho2(i) = Pressure2(i)/(0.2869*(Temp2(i)+273.1));
389 M2(i) = Velocity2(i)/(sqrt(1.4*287*(Temp2(i) + 273.1)));
390 CD2(i) = 0.15;
391
392 i = i + 1;
393 elseif(Time2(i-1)<BurningTime)
394
395 if(Altitude2(i-1)<11000)
396 Temp2(i) = 15.04 - 0.00649*Altitude2(i-1);
397 Pressure2(i) = (101.29 * ((Temp2(i) + 273.1)/288.08).^5.256);
398 rho2(i) = Pressure2(i)/(0.2869*(Temp2(i)+273.1));
399
400
401 elseif(11000<Altitude2(i-1))&&(Altitude2(i-1)<25000)
402 Temp2(i) = -56.46;
403 Pressure2(i) = 22.65*exp(1.73-0.000157*Altitude2(i-1));
404 rho2(i) = Pressure2(i)/(0.2869*(Temp2(i)+273.1));
405
406
407 elseif(Altitude2(i-1)>25000)
408 Temp2(i) = -131.21 + 0.00299*Altitude2(i-1);
409 Pressure2(i) = 2.488 * ((Temp2(i) + 273.1)/216.6)^(-11.388);
410 rho2(i) = Pressure2(i)/(0.2869*(Temp2(i)+273.1));
411
412
413 end
414
415 Time2(i) = Time2(i-1) + DeltaT;
416 Gravity2(i) = g0/(1+Altitude2(i-1)/6371000)^2;
417 Thrust2(i) = MassFlow*5*Ue+Ae*(Pe*10^6-Pressure2(i)*10^3);
418 Acceleration2(i) = (Thrust2(i) - Mass2(i-1)*Gravity2(i) - Drag2(i-1))/Mass2(i-1);
419 Velocity2(i) = Velocity2(i-1) + Acceleration2(i)*DeltaT;
420 Drag2(i) = 0.5*rho2(i)*(Velocity2(i))^2*Sref*CD2(i-1);
421 Mass2(i) = Mass2(i-1) - MassFlow*5*DeltaT;
422 Altitude2(i) = Altitude2(i-1) + Velocity2(i)*DeltaT;
423 M2(i) = Velocity2(i)/(sqrt(1.4*287*(Temp2(i) + 273.1)));
424 Vel = Velocity2(i);
425 VelocityMECO(e) = Velocity2(i);
426 HeightMECO(e) = Altitude2(i);
427
428
429 if(M2(i)<=0.6)
430 CD2(i) = 0.15;
431
432
433 elseif(0.6<M2(i))&&(M2(i)<=1.1)
434 CD2(i) = -4.32*(M2(i))^3 + 11.016*(M2(i))^2 - 8.5536*M2(i) + 2.24952;
435
436
437 elseif(1.1<M2(i))&&(M2(i)<=1.3)
438 CD2(i) = -(M2(i))^2 + 2.2*M2(i) - 0.79;
439

```

```

440
441 elseif(1.3<M2(i))
442 CD2(i) = 0.167669 + 0.17636/(sqrt((M2(i))^2-1));
443
444 end
445
446 i = i + 1;
447
448 else
449 while (Velocity2(i-1)>0)
450 if(Altitude2(i-1)<11000)
451 Temp2(i) = 15.04 - 0.00649*Altitude2(i-1);
452 Pressure2(i) = (101.29 * ((Temp2(i) + 273.1)/288.08).^5.256);
453 rho2(i) = Pressure2(i)/(0.2869*(Temp2(i)+273.1));
454
455 elseif(11000<Altitude2(i-1))&&(Altitude2(i-1)<25000)
456 Temp2(i) = -56.46;
457 Pressure2(i) = 22.65*exp(1.73-0.000157*Altitude2(i-1));
458 rho2(i) = Pressure2(i)/(0.2869*(Temp2(i)+273.1));
459
460 elseif(Altitude2(i-1)>25000)
461 Temp2(i) = -131.21 + 0.00299*Altitude2(i-1);
462 Pressure2(i) = 2.488 * ((Temp2(i) + 273.1)/216.6)^(-11.388);
463 rho2(i) = Pressure2(i)/(0.2869*(Temp2(i)+273.1));
464
465 end
466
467 Time2(i) = Time2(i-1) + DeltaT;
468 Gravity2(i) = g0/(1+Altitude2(i-1)/6371000)^2;
469 Thrust2(i) = 0;
470 Acceleration2(i) = (Thrust2(i) - Mass2(i-1)*Gravity2(i) - Drag2(i-1))/Mass2(i-1);
471 Velocity2(i) = Velocity2(i-1) + Acceleration2(i)*DeltaT;
472 Drag2(i) = 0.5*rho2(i)*(Velocity2(i))^2*Sref*CD2(i-1);
473 Mass2(i) = Mass2(i-1);
474 Altitude2(i) = Altitude2(i-1) + Velocity2(i)*DeltaT;
475 M2(i) = Velocity2(i)/(sqrt(1.4*287*(Temp2(i) + 273.1)));
476 Vel = Velocity2(i);
477 MaxHeight(e) = Altitude2(i);
478
479
480
481
482
483 if(M2(i)<=0.6)
484 CD2(i) = 0.15;
485
486 elseif(0.6<M2(i))&&(M2(i)<=1.1)
487 CD2(i) = -4.32*(M2(i))^3 + 11.016*(M2(i))^2 - 8.5536*M2(i) + 2.24952;
488
489 elseif(1.1<M2(i))&&(M2(i)<=1.3)
490 CD2(i) = -(M2(i))^2 + 2.2*M2(i) - 0.79;
491
492 elseif(1.3<M2(i))
493 CD2(i) = 0.167669 + 0.17636/(sqrt((M2(i))^2-1));
494
495 end
496
497 i = i + 1;
498
499 end
500
501 end
502 end
503 end
504 end
505 end
506
507 figure(10)
508 plot(New_Ae_Div_At(:),VelocityMECO(:))
509 title('\bf Velocity at MECO Vs Area Expansion Ratio','Interpreter','latex')
510 set(gca,'TickLabelInterpreter','latex','FontSize',11)
511 xlabel('Area Expansion Ratio','Interpreter','latex','FontSize',12)
512 ylabel('Velocity at MECO (m/s)','Interpreter','latex','FontSize',12)
513
514 figure(11)
515 plot(New_Ae_Div_At(:),HeightMECO(:)/1000)

```

```

516 title('\bf Height at MECO Vs Area Expansion Ratio','Interpreter','latex')
517 set(gca,'TickLabelInterpreter','latex','FontSize',11)
518 xlabel('Area Expansion Ratio','Interpreter','latex','FontSize',12)
519 ylabel('Height at MECO (Km)','Interpreter','latex','FontSize',12)
520
521 figure(12)
522 plot(New_Ae_Div_At(:),MaxHeight(:)/1000)
523 title('\bf Maximum Height Vs Area Expansion Ratio','Interpreter','latex')
524 set(gca,'TickLabelInterpreter','latex','FontSize',11)
525 xlabel('Area Expansion Ratio','Interpreter','latex','FontSize',12)
526 ylabel('Maximum Height (Km)','Interpreter','latex','FontSize',12)
527
528 figure(13)
529 plot(New_Ae_Div_At(:),MassFlowG(:)/1000)
530 title('\bf Mass Flow Vs Area Expansion Ratio','Interpreter','latex')
531 set(gca,'TickLabelInterpreter','latex','FontSize',11)
532 xlabel('Area Expansion Ratio','Interpreter','latex','FontSize',12)
533 ylabel('Mass Flow (Tons/s)','Interpreter','latex','FontSize',12)
534
535 figure(14)
536 plot(New_Ae_Div_At(:),BurningTimeG(:))
537 title('\bf Burning Time Vs Area Expansion Ratio','Interpreter','latex')
538 set(gca,'TickLabelInterpreter','latex','FontSize',11)
539 xlabel('Area Expansion Ratio','Interpreter','latex','FontSize',12)
540 ylabel('Burning Time (s)','Interpreter','latex','FontSize',12)
541
542 disp('')
543 disp('Graphs Plotted')

```

Referències

- [1] Cumpsty, N. A. *Jet propulsion: a simple guide to the aerodynamic and thermodynamic design and performance of jet engines* 2nd ed. New York : Cambridge University Press, 2003.
- [2] Mattingly, J. D. *Elements of propulsion: gas turbines and rockets*. Reston : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006.
- [3] Kerrebrock, J. L. *Aircraft engines and gas turbines*. 2nd ed. Cambridge : MIT Press, 1992.
- [4] Sutton, G. P.; Biblarz, O. *Rocket propulsion elements*. 7th ed. New York : John Wiley & Sons, 2001
- [5] Hill, P. G.; Peterson, C. R. *Mechanics and thermodynamics of propulsion*. 2nd ed. Massachusetts : Addison-Wesley, 1992
- [6] Cohen, H.; Rogers, G.F.C.; Saravanamuttoo, H.I.H. *Gas turbine theory*. 4th ed. Harlow; Essex : Longman: Addison-Wesley, 1996.

Estudi propulsiu de l'ascens
vertical d'un model del coet Delta
IV Medium
Propulsió



GRETA Q6 ESEIAAT
Universitat Politècnica de Catalunya

GA, JC i ET

20/06/2021

Índex

1	Introducció	2
1.1	Observacions	3
2	Ús del software termoquímic CEA	4
3	Paràmetres principals del coet	5
4	Equació diferencial d'ascens	7
5	Resultats de l'ascens	8
6	Millora del rendiment impulsiu	11
7	Conclusions	13
8	Referències	14
9	Annex	15
9.1	Annex 1. Resultats del software CEA	15
9.2	Annex 2. Coeficient d'arrossegament	18

Índex de figures

1	Delta IV Medium en els primers instants del llançament del satèl·lit DSCS III-B6.	2
2	El motor RS-68 en un test d'ignició al <i>Stennis Space Center</i> durant la seva fase de desenvolupament.	3
3	Ràtio de mescla en funció de la pressió a la cambra de combustió pel cas de combustible LH2 i LOX. [4]	3
4	Evolució de l'alçada en funció del temps.	8
5	Evolució de la velocitat en funció del temps.	8
6	Evolució de l'impuls en funció del temps.	9
7	Evolució del pes del coet en funció del temps.	9
8	Evolució de l'arrossegament en funció del temps.	10
9	Evolució de les forces en funció del temps.	10
10	Evolució de l'alçada final al cap de 177 s en funció de la relació d'àrees.	11
11	Evolució de la velocitat final al cap de 177 s en funció de la relació d'àrees.	12
12	Representació de la funció a trams $C_D = f(M)$	18



1 Introducció

En aquest treball s'estudiarà una trajectòria d'ascens vertical basada en el coet Delta IV Medium. El rang d'altituds de la trajectòria decidida per aquest estudi és de 0 km fins a aproximadament 90 km amb un model d'atmosfera ISA.

El coet Delta IV Medium

El coet Delta IV configuració Medium (Figura 1) pertany a la família de coets de Delta IV fabricats per ULA (*United Launch Alliance*). Concretament, aquesta configuració de coet ha sigut fabricat des del 2006 fins al 2019. [1] [2]

Aquest vehicle orbital és propulsat per un motor de coet RS-68 (Figura 2) fabricat per *Aerojet Rocketdyne*. El motor utilitza hidrogen líquid (LH2) i oxigen líquid (LOX) com a combustible corresponent a un ràtio per pes de 5,9 (Figura 3) i amb una pressió de cambra de combustió de 10,26 MPa. [3]

La massa del coet es reparteix de la següent manera:

Estructura 1a fase	26000 kg
Combustible 1a fase	200400 kg
2a fase	24170 kg
Payload	5000 kg
Total	255570 kg



Figura 1: Delta IV Medium en els primers instants del llançament del satèl·lit DSCS III-B6.



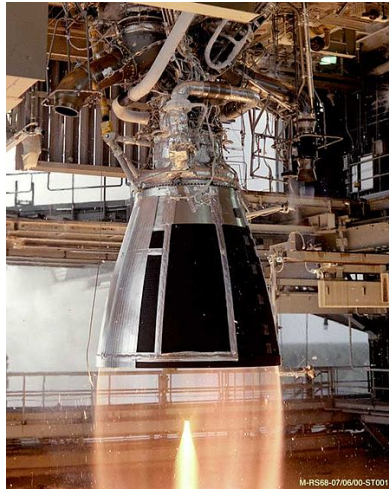


Figura 2: El motor RS-68 en un test d'ignició al *Stennis Space Center* durant la seva fase de desenvolupament.

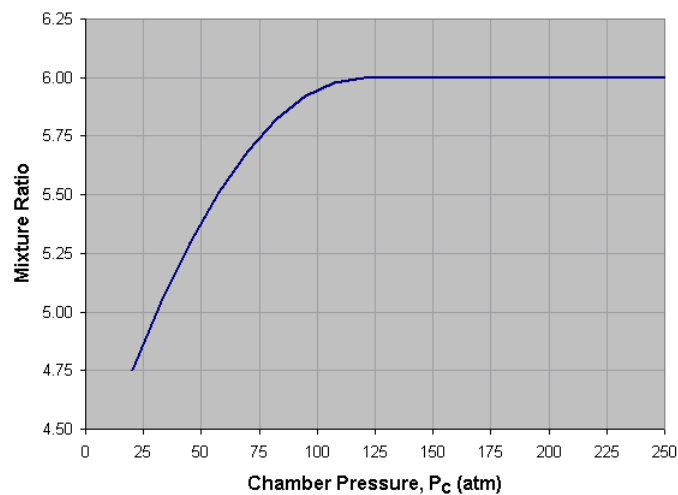


Figura 3: Ràtio de mescla en funció de la pressió a la cambra de combustió pel cas de combustible LH2 i LOX. [4]

1.1 Observacions

- L'acceleració de la gravetat variarà en funció de l'altura de la següent forma:

$$g = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2}$$

On $g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2$ i $R_T = 6371 \text{ km}$.



2 Ús del software termoquímic CEA

A partir del software CEA desenvolupat per la NASA [5], es poden extreure diversos paràmetres de funcionament del motor de coet per unes determinades condicions.

Introduint les condicions de pressió de cambra $P_c = 101,26 \text{ atm}$ i que la relació de combustible-oxidant entre $H_{2,(L)}$ i $O_{2,(L)}$ és de 5,9, es poden extreure els següents resultats:

Altura (km)	P_{ext} (atm)	P_c/P_{ext}	γ
0	1	101.26	1.2438
1	0.887	114.16	1.2459
10	0.261	388.11	1.2702
20	$5.403 \cdot 10^{-2}$	1874.04	1.3034
30	$1.157 \cdot 10^{-2}$	8755.43	1.3299
40	$2.739 \cdot 10^{-3}$	$3.697 \cdot 10^4$	1.3465
50	$7.495 \cdot 10^{-3}$	$1.351 \cdot 10^5$	1.3551
60	$2.005 \cdot 10^{-4}$	$5.051 \cdot 10^5$	1.3617
70	$4.57 \cdot 10^{-5}$	$2.216 \cdot 10^6$	1.3617
80	$8.75 \cdot 10^{-6}$	$1.157 \cdot 10^7$	1.3617
90	$2.987 \cdot 10^{-6}$	$3.390 \cdot 10^7$	1.3617

Taula 1: Taula de valors extreta de l'execució del software CEA. [Annex 1]

A més, el programa també dóna el valor de la massa molar de la mescla, que és $M = 13.359 \text{ g/mol}$, i de la temperatura de combustió, que és $T_C = 3510.5 \text{ K}$.

Llavors, a partir de la mitjana aritmètica dels resultats determinats, s'obté també el coeficient adiabàtic (γ) amb el qual s'operarà:

$$\gamma \approx 1,32196$$



3 Paràmetres principals del coet

Suposant un ràtio de $A_e/A_t = 30$, i una àrea de gola (A_t) necessària per produir una empenta inicial a nivell del mar d'entre un 10% i un 30% del pes inicial, i trobar el flux màssic (\dot{m}) i el temps de combustió (t_b).

Arbitràriament, considerarem que l'empenta inicial compleix la següent condició:

$$F = 1.2 \cdot TOM \cdot g_0$$

on TOM és la massa total del coet en el moment de llançament, definida en l'apartat d'introducció.

A partir d'aquí, es necessita calcular el C_{F0} . Aquest paràmetre segueix la següent equació:

$$C_F = \frac{F}{p_c A_t} \quad (1)$$

Sabent que c^* es pot escriure de la següent manera:

$$c^* = \frac{p_c A_t}{\dot{m}} = \frac{\sqrt{RT_c}}{\bar{m}(M_t = 1, \gamma)} \quad (2)$$

, on $R = Ru/M$. Introduint el paràmetre c^* a l'equació 1, s'obté una nova expressió del C_F :

$$C_F = \frac{\dot{m} u_e + A_e (p_e - p_a)}{p_c A_t} = \frac{u_e}{c^*} + \frac{p_e A_e}{p_c A_t} - \frac{p_a A_e}{p_c A_t} \quad (3)$$

Cada terme del RHS de l'equació 3, es pot reescriure de la següent forma:

$$\frac{u_e}{c^*} = \bar{m}(M_t = 1, \gamma) \frac{M_e \sqrt{\gamma RT_c}}{\sqrt{RT_c}} = \gamma \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{M_e}{\sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2}} \quad (4)$$

$$\frac{p_e}{p_c} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (5)$$

$$\frac{A_e}{A_t} = \frac{\bar{m}(M_t = 1, \gamma)}{\bar{m}(M_e, \gamma)} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{1}{M_e} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (6)$$

Així, tenim tots els termes en funció del *Mach* de sortida (M_e), que es calcula amb un solver a partir de la següent relació:

$$\frac{A_e}{A_t} = \frac{\bar{m}(M_t, \gamma)}{\bar{m}(M_e = 1, \gamma)} = \frac{M_t \left(\left(\frac{\gamma-1}{2} M_e^2 + 1 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \right)}{M_e \left(\left(\frac{\gamma-1}{2} M_t^2 + 1 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \right)} \quad (7)$$

Un cop obtingut M_e de l'equació 7, s'ha d'avaluar amb el criteri de *Sommerfeld* si hi ha despreniment de capa límit a les parets internes de la tovera, que en aquest cas estaria sobre-expansionada. El criteri de *Sommerfeld* estableix que si $p_e < 0.4 \cdot p_a$, es produeix el fenomen mencionat. Per avaluar p_e , fem servir la següent equació:

$$p_e = \frac{p_c}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \quad (8)$$



Si es dona el cas que no hi ha despreniment, el valor de M_e que es farà servir per avaluar C_F serà el trobat a l'equació 7. Però, si hi ha despreniment, s'ha de recalculer el M_e , que denotarem com a M'_e :

$$M'_e = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_c}{0.4p_a} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} \quad (9)$$

L'equació final de càlcul de C_{F0} serà la que s'exposa a continuació, on s'haurà de substituir $M_e = M'_e$ segons el cas en què ens trobem.

$$C_F = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{\gamma M_e + 1/M_e}{\sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2}} - \frac{p_a \bar{m}(M_t = 1, \gamma)}{p_c \bar{m}(M_e, \gamma)} \quad (10)$$

Un cop obtingut C_F per a l'alçada de nivell del mar (C_{F0}), es poden obtenir els paràmetres de A_t , \dot{m} i I_{sp} , que es mantindran constants al llarg de la resta de càlculs i modificacions en aquest informe.

$$A_t = \frac{F}{C_{F0} p_c} \quad (11)$$

$$\dot{m} = A_t \frac{\dot{m}}{A_t} = A_t \frac{p_c}{c^*} \quad (12)$$

$$I_{sp} = \frac{F}{\dot{m} g} \quad (13)$$

$$t_b = \frac{m_f}{\dot{m}} \quad (14)$$

S'ha suposat una empenta inicial de 1,2 vegades el pes inicial. Després de calcular el temps d'encesa (234 s), s'observa que és massa elevat pel rang d'altures establert per a l'estudi. Aquest fet significa que el coet no requereix de tot el combustible de la primera fase per assolir els 90 km d'alçada en les configuracions pre-establertes. Per tant, es decideix reduir la massa de combustible a 91000 kg per tal que el coet hagi consumit tot el combustible en assolir l'altura final.

Llavors, el temps d'encesa final és de:

$$t_b = 180,36 \text{ s}$$

I el cabal màssic determinat anteriorment:

$$\dot{m} = 504,53 \text{ kg/s}$$

Altres paràmetres d'interès obtinguts es mostren a continuació:

$$C_{F0} = 1.5487$$

$$A_t = 0.1083 \text{ m}^2$$

$$I_{sp} = 347.655 \text{ s}$$



4 Equació diferencial d'ascens

Per a trobar l'evolució de la velocitat i de l'alçada del coet en funció del temps és necessari resoldre el sistema de dues equacions diferencials ordinàries que es mostra a continuació:

$$\begin{cases} F - W - D = m(t) \frac{dV}{dt} \\ V = \frac{dX}{dt} \end{cases} \quad (15)$$

En aquest cas, la X fa referència a l'alçada vertical mentre que la V a la velocitat vertical del coet.

De la primera equació diferencial s'han de destacar uns quants aspectes en relació amb els termes de l'esquerra de l'igual (LHS):

- Empenta (F): L'empenta es calcula dins la funció *Thrust.m*. És funció de la pressió exterior, és a dir, de l'alçada (variable que es vol resoldre). La seva expressió també depèn de si hi ha despreniment o no, considerant la pressió de sortida com l'ambient si sí que té lloc despreniment o la pressió de sortida corresponent si no hi té lloc.
- Pes (W): El pes es calcula directament dins l'expressió de l'equació diferencial de la funció *Fsyst_Treball2.m* perquè la relació és lineal, a mesura que es va cremant combustible, el pes del coet va disminuint. Això és possible gràcies a la consideració de flux màssic constant.
- Drag (D): El drag es calcula amb la funció *Drag.m*. S'utilitza la pressió dinàmica i el coeficient de resistència del vehicle (veure Annex 2). Aquest coeficient és funció del nombre de Mach, que depèn de la velocitat (variable que es vol resoldre) i, alhora, de la velocitat del so, que depèn de l'alçada a la qual es trobi el coet.

Dins el codi hi ha dues funcions que resolen aquest sistema d'equacions diferencials, *Fsyst_Treball2.m* i *Fsyst_Treball3.m*. La primera s'utilitza per a calcular l'evolució de l'alçada i velocitat del coet en funció del temps de combustió per a la relació d'àrees original, $A_e/A_t = 30$. La segona s'ocupa de la part de codi on es troba la variació d'impuls i alçada final en funció de la relació d'àrees per avaluar quina de les relacions ens proporciona unes millors prestacions finals.

El canvi més significatiu entre les dues és la inclusió de la funció *Initial_Caculations.m* dins de *Fsyst_Treball3.m*. Com que varia la relació d'àrees és necessari recalcular paràmetres com l'alçada on deixa d'haver-hi despreniment o el Mach geomètric de sortida.



5 Resultats de l'ascens

En les següents figures es poden observar els resultats extrets de la solució numèrica de l'equació diferencial ordinària de l'ascens del vehicle:

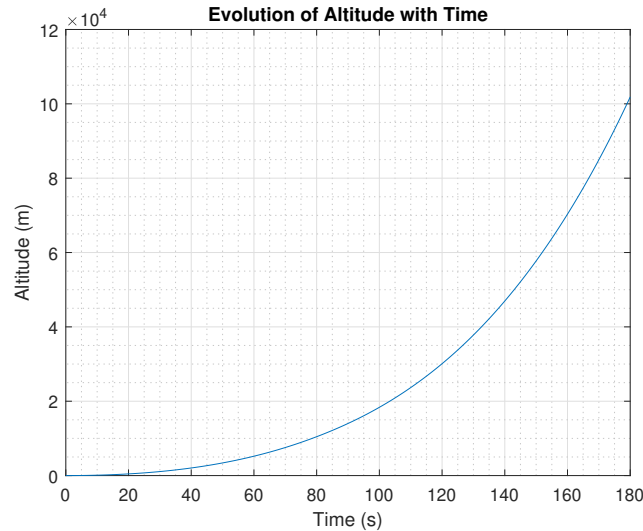


Figura 4: Evolució de l'alçada en funció del temps.

S'observa com l'alçada final assolida del coet són aproximadament 100 km, un valor proper a l'establert per a l'estudi.

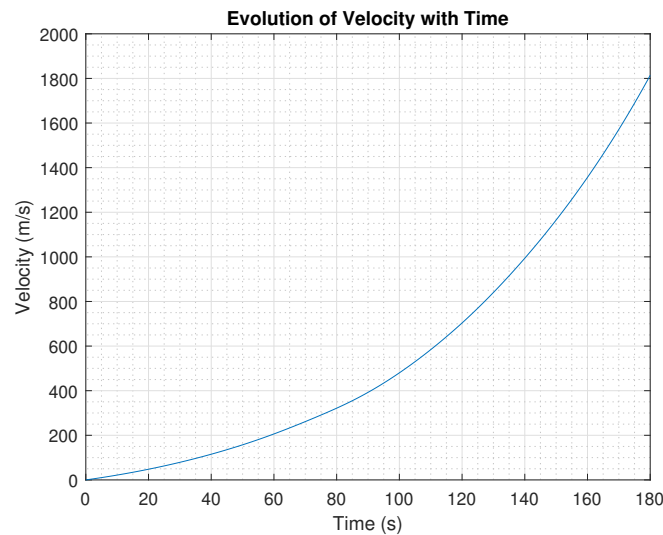


Figura 5: Evolució de la velocitat en funció del temps.

Com és d'esperar, la velocitat creix en funció del temps degut a la falta d'atmosfera a altures superiors i a la disminució constant del pes del vehicle.



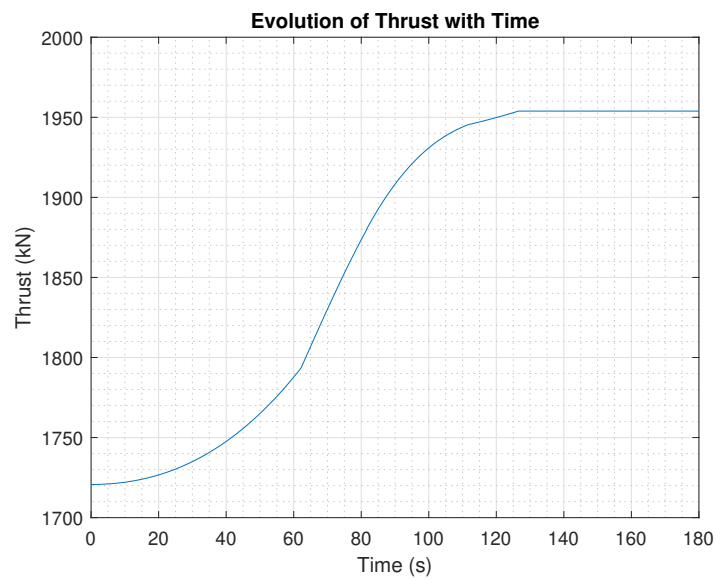


Figura 6: Evolució de l'impuls en funció del temps.

Es pot observar com aproximadament als 65 s hi ha un canvi de tendència degut a l'altura de no despreniment de la tovera. A més, s'observa que a partir dels 125 s l'impuls és constant, degut a que a partir d'aquella alçada s'ha considerat pressió i densitat nul·la segons la aproximació feta a partir del model ISA.

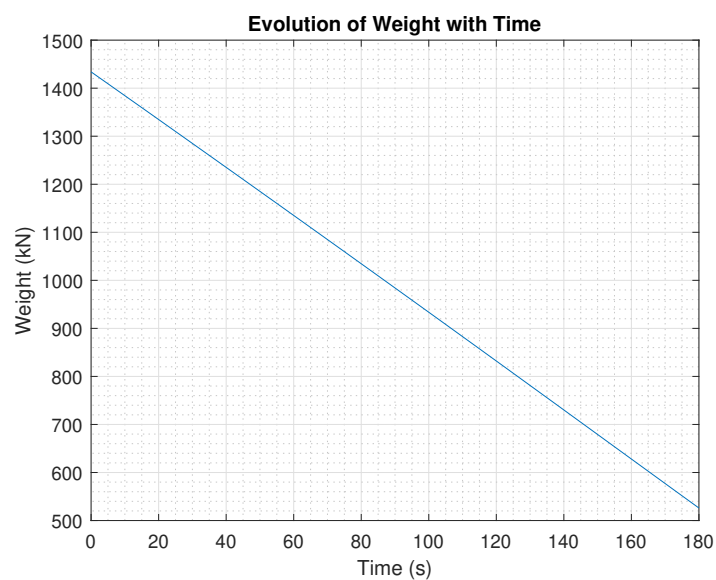


Figura 7: Evolució del pes del coet en funció del temps.

Tal com es pot observar, s'ha considerat una despesa de combustible lineal.



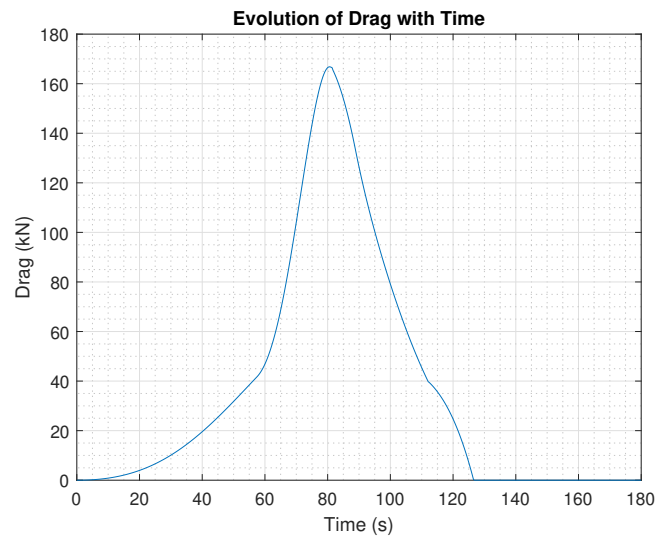


Figura 8: Evolució de l'arrossegament en funció del temps.

En l'anterior Figura es pot observar com als 80 s l'arrossegament que experimenta el coet és màxim. Aquest punt, en l'àmbit de la coeteria, s'anomena MAX-Q o *Maximum Aerodynamic Pressure*. Aquest pic de màxim arrossegament es pot disminuir regulant el flux màssic de combustible durant l'ascens. En el cas d'aquest treball, s'ha considerat que la despesa de combustible és lineal i que, per tant, el flux màssic no és regulable.

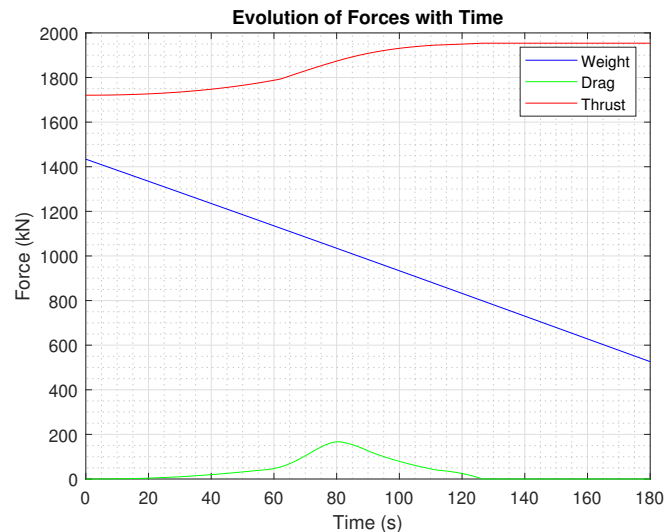


Figura 9: Evolució de les forces en funció del temps.

S'observa com l'empenta és lògicament la força més gran que experimenta el coet.



6 Millora del rendiment impulsiu

En aquest apartat es busca millorar el rendiment del coet anterior a força de canviar la relació d'àrees de la tovera. És a dir, es canvia la mida de l'àrea de sortida, mentre que l'àrea de la gola es manté constant. Aquesta variació comporta que la massa estructural del coet variï respecte de la relació d'àrees que es tenia anteriorment. La penalització de massa del coet ve determinada per la següent expressió, on $\varepsilon = 0.001$:

$$\Delta m_{st} = m_0 \frac{\Delta A_e}{A_t} \varepsilon \quad (16)$$

Repetint el procés de resolució de l'equació diferencial de la trajectòria del coet pels diferents ràtios d'àrees que s'estudia (de 4 a 40), s'obtenen els següents resultats. Notar que els resultats són fins a un temps d'execució de 177 s. Això és degut al fet que el temps de combustió varia per a diferents ràtios d'àrea, ja que el C_F varia, i la massa també. Això provoca que algunes relacions d'àrea no permetin un temps de combustió de 180 s. Per tant, s'ha decidit, arbitràriament, estudiar la trajectòria fins a 177 s, ja que es considera que fer aquesta aproximació és vàlid, i no afectarà els resultats finals. A continuació es mostren els resultats obtinguts.

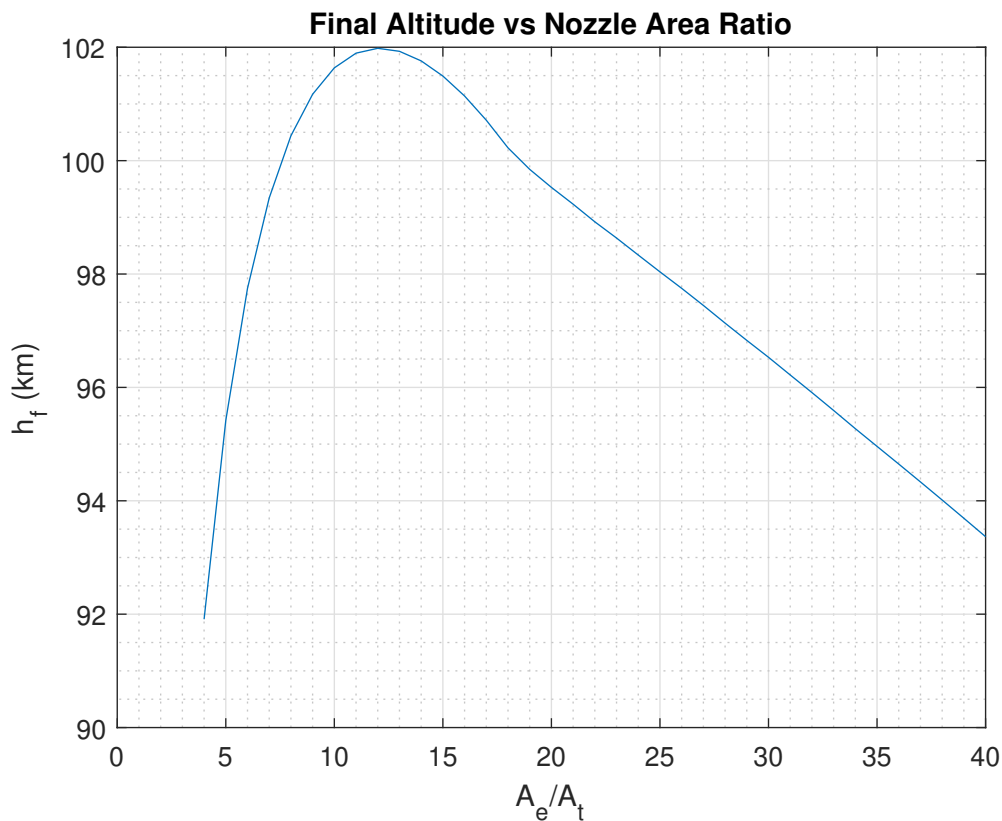


Figura 10: Evolució de l'alçada final al cap de 177 s en funció de la relació d'àrees.



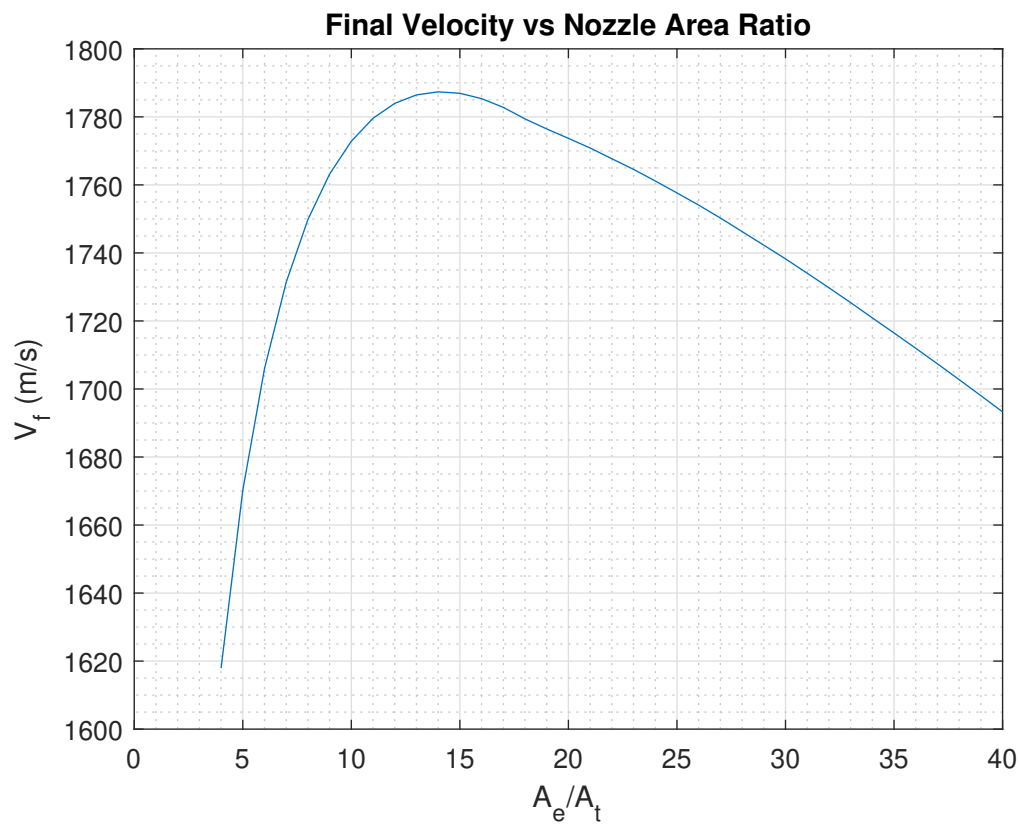


Figura 11: Evolució de la velocitat final al cap de 177 s en funció de la relació d'àrees.

Com es pot observar a les dues figures anteriors, la zona de rendiment òptim de la tovera abasta els ràtios d'àrea entre 10 i 15. En concret, la velocitat final és màxima per a $A_e/A_t = 14$, i l'alçada final és màxima per a $A_e/A_t = 12$. Com a punt òptim, es triaria la relació d'àrees $A_e/A_t = 13$, ja que els valors de velocitat i altura final per a aquesta relació d'àrees són pràcticament idèntics als valors màxims de les dues magnituds, la qual cosa provoca que per a $A_e/A_t = 13$ s'aconsegueixi una combinació de màxima altura possible amb la màxima energia cinètica possible.



7 Conclusions

Finalment, es poden extreure diferents conclusions.

Quant als objectius del treball, que eren resoldre l'equació d'ascens d'un coet a partir de les condicions d'atmosfera, resistència aerodinàmica i variació de gravetat al llarg de la trajectòria, es pot dir que s'ha aconseguit. Addicionalment, s'ha estudiat amb èxit l'optimització dels paràmetres geomètrics de la tovera per a aconseguir major rendiment del coet.

Quant als resultats obtinguts a l'apartat 5, es pot dir que són raonables per a la relació d'àrees $A_e/A_t = 30$, malgrat que s'hagin hagut de canviar alguns paràmetres massics per tal d'ajustar el temps d'encesa i el flux màssic a uns resultats raonables.

De l'apartat 6, es conclou que la relació d'àrees òptima és $A_e/A_t = 13$. Tenint en compte que coets com el *Saturn V* utilitzava el motor *Rocketdyne F-1*, amb un ràtio d'àrees de 16 [6], es pot donar el resultat obtingut com a bo i dins d'un rang esperat. També cal destacar, però, que la majoria de motors de coet actuals utilitzen ràtios d'àrees d'entre 20 i 35, la qual cosa deixa el nostre resultat fora de marge després de la redimensionalització

Per últim es pot afirmar que aquest treball és recomanable realitzar-lo i ha ajudat a comprendre la teoria donada a l'assignatura, proporcionant així un coneixement addicional sobre l'equació diferencial del coet i com resoldre-la mitjançant mètodes de càlcul numèrics.



8 Referències

- [1] United Launch Alliance. *Delta IV Launch Services User's Guide*. Centennial, CO. Juny, 2013. En línia: <https://www.ulalaunch.com/docs/default-source/rockets/delta-iv-user's-guide.pdf>
- [2] Wikipedia. *Delta IV*. Maig, 2021. En línia: https://en.wikipedia.org/wiki/Delta_IV
- [3] Wikipedia. *RS-68*. Desembre, 2020. En línia: <https://en.wikipedia.org/wiki/RS-68#Variants>
- [4] Rocket Space Technology. *Liquid Oxygen Liquid Hydrogen. Optimum Mixture Ratio*. En línia: <http://www.braeunig.us/space/comb-OH.htm>
- [5] NASA. *Chemical Equilibrium with Application. CEARUN*. Glenn Research Center. En línia: <https://cearun.grc.nasa.gov/>
- [6] Wikipedia. *Rocketdyne F-1*. Juny, 2021. En línia: https://en.wikipedia.org/wiki/Rocketdyne_F-1



9 Annex

9.1 Annex 1. Resultats del software CEA

data.txt

NASA-GLENN CHEMICAL EQUILIBRIUM PROGRAM CEA2, FEBRUARY 5, 2004
BY BONNIE MCBRIDE AND SANFORD GORDON
REFS: NASA RP-1311, PART I, 1994 AND NASA RP-1311, PART II, 1996

```
### CEA analysis performed on Sun 23-May-2021 11:09:42

# Problem Type: "Rocket" Infinite Area Combustor

prob case=1234567891234566335 ro frozen

# Pressure 1 value:
p,atm= 101.26
# Chamber/Exit Pressure Ratio 8 values:
pi/p= 101.26, 114.16, 388.11, 1874.04, 8755.43, 36970.78, 135100, 505100

# Oxidizer/Fuel Wt. ratio 1 value:
o/f= 5.9

# You selected the following fuels and oxidizers:
reac
fuel H2L          mole=100.0000
oxid O2L          mole=100.0000

# You selected these options for output:
# short version of output
output short
# Proportions of any products will be expressed as Mole Fractions.
# Heat will be expressed as siunits
output siunits

# Input prepared by this script:/var/www/sites/cearun.grc.nasa.gov/cgi-bin/CEARU
N/prepareInputFile.cgi

### IMPORTANT: The following line is the end of your CEA input file!
end
```

THEORETICAL ROCKET PERFORMANCE ASSUMING FROZEN COMPOSITION

Pin = 1488.1 PSIA
CASE = 123456789123456

	REACTANT	MOLES	ENERGY KJ/KG-MOL	TEMP K
FUEL	H2L	100.0000000	-9012.000	20.270
OXIDANT	O2L	100.0000000	-12979.000	90.170





O/F= 5.90000 %FUEL= 14.492754 R,EQ.RATIO= 1.345200 PHI,EQ.RATIO= 1.345200

	CHAMBER	THROAT	EXIT	EXIT	EXIT	EXIT	EXIT	EXIT
Pinf/P	1.0000	1.7707	101.26	114.16	388.11	1874.04	8755.43	36970.8
P, BAR	102.60	57.945	1.0132	0.89875	0.26436	0.05475	0.01172	0.00278
T, K	3510.50	3196.18	1553.27	1517.06	1180.65	831.07	573.30	398.16
RHO, KG/CU M	4.6958 0	2.9128 0	1.0481-1	9.5183-2	3.5975-2	1.0584-2	3.2841-3	1.1198-3
H, KJ/KG	-994.72	-2186.52	-7978.26	-8092.83	-9116.43	-10094.8	-10762.2	-11193.4
U, KJ/KG	-3179.69	-4175.85	-8945.03	-9037.07	-9851.27	-10612.0	-11119.0	-11441.2
G, KJ/KG	-63245.7	-58863.7	-35522.0	-34994.6	-30052.6	-24832.0	-20928.5	-18254.0
S, KJ/KGK	17.7328	17.7328	17.7328	17.7328	17.7328	17.7328	17.7328	17.7328
M, 1/n	13.359	13.359	13.359	13.359	13.359	13.359	13.359	13.359
Cp, KJ/KGK	3.8188	3.7630	3.1757	3.1536	2.9256	2.6738	2.5093	2.4188
GAMMAs	1.1947	1.1982	1.2438	1.2459	1.2702	1.3034	1.3299	1.3465
SON VEL,M/SEC	1615.7	1543.9	1096.6	1084.6	966.1	821.1	688.9	577.7
MACH NUMBER	0.000	1.000	3.408	3.474	4.172	5.196	6.416	7.818

PERFORMANCE PARAMETERS

Ae/At	1.00000	11.481	12.539	31.016	99.591	309.81	889.16
CSTAR, M/SEC	2281.6	2281.6	2281.6	2281.6	2281.6	2281.6	2281.6
CF	0.6767	1.6380	1.6514	1.7665	1.8698	1.9372	1.9795
Ivac, M/SEC	2832.4	3995.9	4018.4	4212.6	4387.4	4500.6	4571.2
Isp, M/SEC	1543.9	3737.3	3767.8	4030.3	4266.2	4419.8	4516.3

MOLE FRACTIONS

H2O	0.66751	H2O	0.00001
-----	---------	-----	---------

THEORETICAL ROCKET PERFORMANCE ASSUMING FROZEN COMPOSITION

Pin = 1488.1 PSIA
CASE = 123456789123456

REACTANT	MOLES	ENERGY KJ/KG-MOL	TEMP K
FUEL H2L	100.0000000	-9012.000	20.270
OXIDANT O2L	100.0000000	-12979.000	90.170

O/F= 5.90000 %FUEL= 14.492754 R,EQ.RATIO= 1.345200 PHI,EQ.RATIO= 1.345200

	CHAMBER	THROAT	EXIT	EXIT
Pinf/P	1.0000	1.7707	135100.0	505100.0
P, BAR	102.60	57.945	0.00076	0.00020
T, K	3510.50	3196.18	284.30	200.77
RHO, KG/CU M	4.6958 0	2.9128 0	4.2919-4	1.6256-4
H, KJ/KG	-994.72	-2186.52	-11466.2	-11663.3
U, KJ/KG	-3179.69	-4175.85	-11643.1	-11788.3
G, KJ/KG	-63245.7	-58863.7	-16507.6	-15223.6
S, KJ/KGK	17.7328	17.7328	17.7328	17.7328
M, 1/n	13.359	13.359	13.359	13.359
Cp, KJ/KGK	3.8188	3.7630	2.3750	2.3432
GAMMAs	1.1947	1.1982	1.3551	1.3617
SON VEL,M/SEC	1615.7	1543.9	489.7	412.5
MACH NUMBER	0.000	1.000	9.345	11.198





PERFORMANCE PARAMETERS

Ae/At	1.00000	2289.59	5988.92
CSTAR, M/SEC	2281.6	2281.6	2281.6
CF	0.6767	2.0058	2.0246
Ivac, M/SEC	2832.4	4615.0	4646.3
Isp, M/SEC	1543.9	4576.3	4619.2

MOLE FRACTIONS

H2O	0.66751	H2O2	0.00001
-----	---------	------	---------



9.2 Annex 2. Coeficient d'arrossegament

La funció de la resistència s'expressa segons l'expressió següent.

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S_{ref} C_D$$

On la superfície de referència equival a $S_{ref} = \pi \frac{D^2}{4}$, i el diàmetre del coet és de 5m.

Es necessita l'evolució del coeficient de resistència C_D en funció del número de Mach per simular l'arrossegament del coet durant l'ascens. L'aproximació escollida es resumeix en la Taula 2.

Número de Mach	Equació del tram
$M \leq 0.6$	0.15
$0.6 < M \leq 1.1$	$-4.32M^3 + 11.016M^2 - 8.5536M + 2.24952$
$1.1 < M \leq 1.3$	$-M^2 + 2.2M - 0.79$
$1.3 < M \leq 5$	$0.16769 + \frac{0.17636}{\sqrt{M^2-1}}$
$M \geq 5$	0.203

Taula 2: Coeficient d'arrossegament en funció del Mach

Si es grafica la funció a trossos anterior queda la representació següent:

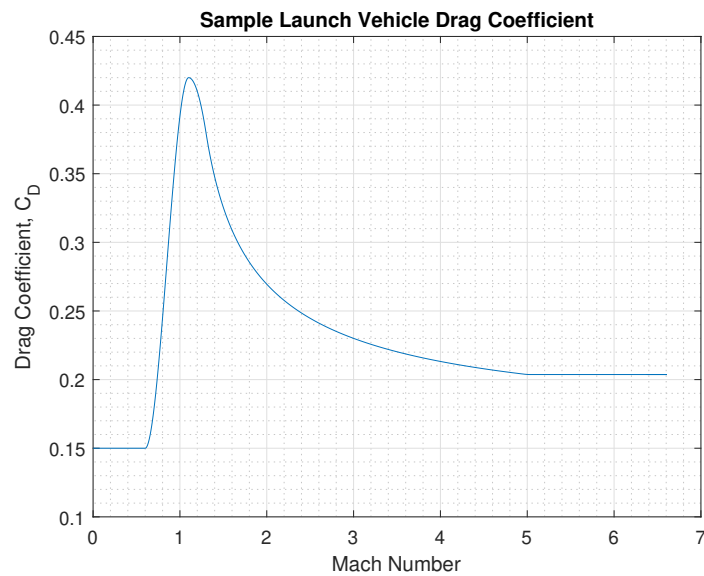


Figura 12: Representació de la funció a trossos $C_D = f(M)$.

